代数体上の例外 LIE 環の構成と分類について

伊吹山知義（大阪大学理学研究科）

第 7 回整数論サマースクール (1999)

例外 LIE 環についてのサーベイをすることを目的とする。単にコホモロジー論などで分類表を作るということを目的とするわけではなく、実際にどのように構成されているのか目に見えるようにするのが目標である。

1 概説

例外単純 Lie 環と呼ばれるものは標数 0 の代数的閉体上、G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の 5 種類ある。次元はそれぞれ、14, 52, 78, 133, 248 である。Lie 環の演算自身はカルタン行列から構造定数その他が決まるわけであるから、（少なくとも標数 0 の閉体上は）それで終わりとも言えるが、より具体的に実現しようとすると、これらはいずれも非結合的な代数 (algebra)、すなわち、Cayley 代数や Jordan 代数と結びついており、個人の趣味の問題もあるかもしれないが、ちょっと考える以上になかなか面白い。そもそもたとえば Jordan 代数に近い概念である Jordan triple system は有界対称領域とカテゴリカルに同値だったりするわけであって、Jordan 代数自身は至極まっとうな数学的対象である。さらには、exceptional dual pair などを利用した Weil 表現の類似物によるリフティングの構成がはやっていたりもするのであって、例外群をあえて除外する考察から理由もない、というよりも、古典群を理解するためにも例外群の理解が不可欠な場面もでている。（$\mathsf{Sp}(3)$ の一部の保型表現の spinor zeta の関数等式の G_2 をもちいた証明など。）ここでは表現論に立ち入る余裕はないが、古くから少なくとも散発的には知られていることになっているにもかかわらず、あまり文献もなくはっきり理解している人も少ない「例外 Lie 環の古典論」について解説することを目的とする。手にはいりにくい文献も一部

にあって、まず文献のない状態で、推測しつつ証明を自分で組み立ててみた部分もあった。少なくとも部分的には、なるべく証明を詳しく（基本的には、比較的容易に手に入る本、たとえば [25], [6] などを法として self contained に）書いてみることにした。もちろんこの分野はかなり特殊なテクニックも多々あり、このような短い論説で本当に詳しい解説を書くと言うことは思いもよらないことである。この点では文献案内にならざるを得ないのはやむを得ないことと思う。（文献案内だけでも十分面白いというのが、この分野について当初はなにも知らなかった私の実感である。）あるいはいろいろもっと簡易化される部分もあるかもしれないが、なにか気づかれた場合はお知らせくださると幸いである。なお、本文を通じて、体はすべて標数 0 と仮定する。また所々では代数体と仮定する。（標数正の Lie 環の分類というのはよく知らないので標数が 0 以外の時は注意深く考える手間を省きたいと思い、いっさい無視した。有限体ならいろいろな理論もあるが略す。標数正の閉体上の分類は [26] などに解説があるようである。）Lie 環 L の構成に応じて、代数体上の代数群の例を 1 つづつあげることができるはずであるが、しかし、これについてはあまり明快にわからないケースもあった。普通に考えれば $\mathsf{Aut}(\mathsf{L})$ は明らかに L と同じ体上定義された代数群であり、実数体などまであげて考えれば、$\mathsf{Aut}(\mathsf{L})$ の連結成分はいわゆる Lie 群の Adjoint 表現であって、up to isogeny では例を与えている。もちろん一般にこれは連結ではない。（外部自己同型がいくつあるかはよく知られている。e.g. [19] etc.）しかし、実際にはもっとわかりやすい algebra の derivation と automorphism という関係のこともあり、記述がやや易しい場合もある。G_2, F_4 などはそうである。このような記述は一般にはよくわからなかった。

2　非結合代数についての注意

以下で代数 (algebra) と言うときに、なにを意味するかを述べておく。本稿を通じて、すべて基礎体上、有限次元の場合に話を限る。可換体 F 上の有限次元ベクトル空間 V が F 上の algebra というのは $x, y \in \mathsf{V}$ に対して、xy という、F bilinear な演算が定義されていることであるとする。すなわち、F の元と積はどのようにでも交換可能 ($a(xy) = (ax)y = x(ay)$, $a \in \mathsf{F}$) であり、かつ左右の分配法則を満たしているとする。ここでポイントは

「積の結合法則は仮定しない」

ということである。V について乗法の単位元の存在は仮定したりしなかったりである。たとえば Lie 環では単位元は無いのが普通であり、従って F 自身を V に自然に埋め込む方法は通常ない。一方で Hurwizt 代数、Jordan 代数などでは、単位元はあるのが普通であり、たいてい F は V の部分環と思える。F 上の代数 V から W への準同型というのは、F 上のベクトル空間としての線形写像 f で、$f(xy) = f(x)f(y)$ となるものである。単位元が存在するときには、単位元を単位元に写すと仮定することも多いが、これも文脈による。しかし話の都合上どちらかに決めておかないと混乱しそうなので、今は準同型の定義には単位元を単位元に写すと言うことまで要請しておく。特に f が線形同型ならば f は同型を呼ばれ、$V = W$ ならば自己同型と呼ばれることは普通の通りである。V の自己同型群を $\mathrm{Aut}(V)$ とかく。$\mathrm{Aut}(V)$ は通常の線形写像のなす環の部分集合であって、もちろん結合的であり、普通の意味での群である。これが体 F 上の代数群であるのは、自己同型という条件を基底に関して書いてみれば 2 次の多項式の条件であるからあきらかである。F 代数 A の部分 F 加群 I が両側イデアルというのは、結合的でなくても普通に定義される。(任意の $a \in A$ に対して、$aI \subset I$ かつ $Ia \subset I$.) 特に A が 0 と A 以外にイデアルを持たず、かつ $A^2 \neq 0$ であるとき、単純であるという。(cf. Schafer p.15 など) また、A が単位元 e を持つとき、A の中心が $F = Fe$ であるなら、A を F 代数として中心的 (central) という。(単位元を持たないときについては [25], [14] を参照。)

3 Lie algebra

念のため Lie 代数の定義を述べる。L が体 F 上の代数であって、次の二つの条件

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad x^2 = 0, \\
&(2) \qquad (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0
\end{aligned}
$$

を満たすとき、F 上の Lie 代数という。特に (2) を jacobi 律という。Lie 代数の積については xy のかわりに $[x, y]$ という記号を用いることが一般的であるから以下ではそうする。V が F 上のベクトル空間ならば、線形変換のなす集合 $\mathrm{End}(V)$ は、$X, Y \in \mathrm{End}(V)$ に対し $[X, Y] = XY - YX$ で自然に Lie 環になる。さて、さらに V を F 上の任意の(非結合的かもし

れない）代数とする。$\mathsf{Der}(V)$ で V の F 上の derivation の全体を表す。すなわち、 $D \in \mathsf{Der}(V)$ というのは、D は V 上の F 線形写像であって、

$$D(xy) = (Dx)y + x(DY)$$

を満たすということが定義である。$\mathsf{Der}(V)$ に演算 $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ を導入すると $\mathsf{Der}(V)$ は F 上の Lie 環になる。もし $F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であれば、$\mathsf{Aut}(V)$ の Lie 環が $\mathsf{Der}(V)$ になる。（実数体または複素数体なら $\exp$ がいつでも収束する。$\exp(tD) \in \mathsf{Aut}(V)$ の根拠は微分方程式論である。e.g. [6] p.36)

F-algebra V の derivation が inner というのを定義したい。今 $x \in V$ に対して、$\mathsf{End}(V)$ の元 $L(x)$ と $R(x)$ を $L(x)y = xy$, $R(x)y = xy$ という線形変換で定義する。$L(V) + R(V)$ を含む $\mathsf{End}(V)$ の最小の部分 Lie 環を V の Lie multiplication algebra といい、$\mathcal{L}(V)$ と書くことにする。$\mathsf{Der}(V) \cap \mathcal{L}(V)$ の元のことを V の inner derivation ということにする。これは $\mathsf{Der}(V)$ の中でイデアルをなす。よってたとえば $\mathsf{Der}(V)$ が単純なら、（普通は） $\mathsf{Der}(V)$ の元はみな inner である。この定義は少し漠然としすぎていて、実感がつかめないが、V が Lie 環ならば、inner derivation D はある a について $Dx = [a, x]$ ということであり、V が結合的代数で、単位元を持つとするとやはりある $a \in V$ について $Dx = ax - xa$ となることが inner derivation であるための必要十分条件である。([25] p. 21) (Cayley algebra と Jordan algebra については、あとで説明する。)

Theorem 3.1 ([25] p.22) *F が標数 0 で、V が有限次元かつ単純環の直和であり、かつ単位元があれば、V の任意の derivation は inner である。*

4 Composition algebra

この節では Hurwitz algebra とか、Composition algabra とか言われているものについて、解説する。基本的には Cayley algebra を解説したいわけである。基礎体の標数は簡単のために 0 をするが、標数が 2 でなければたいていは同じはずであるし、とりわけ難しいわけでもない。さらには標数が 2 でも Artin Schreier などをもちだせばいい。しかし前に断ったように、正標数はいっさい無視する。

まず、話の順序として alternative algebra の定義を述べる。体 F 上の代数 A について、associator の記号

$$[a, b, c] = (ab)c - a(bc),$$

を導入する。結合代数ならば、もちろんいつでも $[a,b,c]=0$ である。代数 A の任意の a, b について次の 2 つの条件が成り立つとき、A を alternative という。

$$(1) \qquad [a,a,b]=0$$
$$(2) \qquad [b,a,a]=0$$

実はこのとき $[a,b,c]$ が a, b, c の置換に関して、交代的に振る舞うのが（置換の符号だけ値が変わるのが）容易に証明できる。また、 A の任意の 2 つの元が生成する部分代数は結合的になる。(Artin, cf. [25] p.29.) 逆は定義より当たり前である。

Theorem 4.1 ([25] p. 56) F 上有限次元の中心的単純 *alternative algebra* は、F 上中心的結合的な斜体 D 上の行列環 $M_n(D)$ であるか、または F 上の 8 次の *Cayley algebra* である。

Cayley algebra の定義をまだしていなかった。F-Algebra A が involution $x \to \bar{x}$ （すなわち位数 2 の反同型）をもち、さらに main involution すなわち、$x+\bar{x} \in F$, $x\bar{x} \in F$ であると仮定する。ある $\mu \in F$ をとり、A^2 上に、ベクトル空間の直和の構造をいれ、乗法を $(x,y), (u,v) \in A^2$ について

$$(x,y)*(u,v) = (xu+\mu\bar{v}y, y\bar{u}+vx)$$

で定義する。（これは [25] p. 45 の定義で, 第 2 成分をバーをつけて置き換えた形になっている。ここでは [6] p. 85 の方に定義をあわせた。）これを Cayley Dickson Process という。A^2 で $\overline{(x,y)} = (\bar{x},-y)$ とおくと、これは A^2 の main involution になる。また、$\mathrm{tr}(x,y) = x+\bar{x}$, $n(x,y) = x\bar{x}-\mu y\bar{y}$ とおき、それぞれトレースとノルムという。Cayley Dickson Process は、実数体 $\mathbb{R}$ を出発点として、$\mathbb{C}$, H (Hamilton quaternions), O (octanions) を順次自然につくる方法になっている。特に A が F 上の 4 元数環であるとき、上のように作った A^2 のことを Cayley algebra という。（もちろん A と μ のとりかたによる。）Cayley algebra は alternative algebra である。実際、A^2 で、$j=(0,1)$ と書くと、定義により、$(x,y)=x+yj$ である。よって、やはり定義より

$$\begin{aligned} a(bj) &= (ba)j, \\ (aj)b &= (a\bar{b})j, \\ (aj)(bj) &= \mu\bar{b}a. \end{aligned}$$

$a = x + yj$, $b = u + vj$ として $(a, \bar{a}, b) = 0$ を示す。直接計算して

$$
\begin{aligned}
(a, \bar{a}, b) &= (a\bar{a})b - a(\bar{a}b) \\
&= N(a)b - (x + yj)((\bar{x}u - \mu\bar{v}y) + (-y\bar{u} + v\bar{x})j) \\
&= N(a)b - N(x)u + N(x)vj + \mu x\bar{v}y + x((y\bar{u})j) \\
&\quad -x((v\bar{x})j) - (yj)(\bar{x}u) + \mu(yj)(\bar{v}y) - (yj)((v\bar{x})j) \\
&= N(a)b - N(a)b = 0.
\end{aligned}
$$

これより、$(a, a, b) = (a, \mathrm{tr}(a) - \bar{a}, b) = 0$. 同様に $(b, a, a) = -\overline{(\bar{a}, \bar{a}, \bar{b})} = 0$ でもある。

どんな Cayley algebra も結合的ではない。実際、x, $y \in A$ ならば $(a, b, j) = (ab)j - a(bj) = (ab)j - (ba)j = [a, b]j$ であるから、A が非可換であることより、$[a, b] \neq 0$ のことがあり、よって、 $(a, b, j) \neq 0$ のことがある。

特に $A = M_2(F)$, $\mu = 1$ として得られるものは、もっとも単純であり、またあきらかにゼロ因子を持っているが、これを split Cayley algebra と呼ぶ。

単位元を持つ F-algebra C に対して、F 上の非退化２次形式 Q があって、$Q(xy) = Q(x)Q(y)$ $(x, y \in C)$ となるとき、C を composition algebra または Hurwitz algebra という。

Theorem 4.2 ([25] p. 73) F 上の *composition algebra* は、F, $F \oplus F$, F の（可換な）２次拡大体、F 上の４元数体、F 上の *Cayley algebra* のみである。

Cayley algebra についての性質をまとめておく。

Theorem 4.3 ([25] p. 70, p.72) 体 F を固定して、F 上の *Cayley algebra* を考える。

1. *ノルムがゼロとなる元はゼロ因子であり、ゼロでない元は可逆である、ゼロでないゼロ因子を持つ Cayley algebra*（すなわち *division* でない *Cayley algebra)* は皆同型である。

2. *Cayley algebras* C_1 と C_2 が同型であるための必要十分条件はそれらのノルムが、F 上の *8* 変数２次形式として同値であることである。

3. 特に F が代数体ならば、同型類の個数は 2^t （t は F の実素点の個数）である。

最後の主張は 2 次形式の Hasse の原理と、5 変数以上の 2 次形式は非アルキメデス局所体ではいつでも non-trivial にゼロをあらわすことに基づいている。すなわち、具体的には、実素点をいくつか具体的に指定して、A を実素点のうちでは、そこだけで division になるようなものをとっておき、$\mu \in F^\times$ としては、実素点のうち指定されたところで負、残りでは正になるような符号分布を持つものがとれるので、これをとって、(A, μ) から Cayley algebra をつくれば、この指定された実素点のみで division になる algebra ができる。

もう少し詳しく説明すると、まず、任意の 2 次形式が Cayley algebra のノルムになれるわけではない。たとえば、split する素点 (有限素点ではすべてそうである）では

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と同値でなければならない。この 2 次形式の Hasse invariant は どこの素点でも 1 であるのは容易にわかる。(Hasse invariant の定義は、対角化しておいて $diag(a_1, \ldots, a_8)$ とした上で $\prod_{i,j}(a_i, a_j)_v$、ただし $(x, y)_v$ は素点 v での Hilbert symbol、 というのが定義であるが、ここで i, j の動く範囲は $i \leq j$ とするのと、$i < j$ とするのと二通りの流儀がある。このどちらでも Hasse invariant は 1 である。）すべての素点での Hasse invariant の積は積公式より 1 である。有限素点では一般に判別式と Hasse invariant のみで、2 次形式の同型類が決まる。しかし、実素点ではそうではない。実素点ではいうまでもなく、符号で同型類が決まっている。たとえば有理数体上の Cayley algebra ならば、有限素点では、判別式 1 かつ Hasse invariant 1 であり、無限素点では、積公式より、やはり Hasse invariant は 1 のはずであるし、また、判別式は、有限素点ですべて平方であるから、無限素点でも平方、つまりプラスであるから、符号は負の部分が偶数であ

る。それでも符号は違いうる。実際、このような候補は（Hasse invariant として、なにを採用しようとも) 符号が $(4,4)$ のものと $(8,0)$ のものと $(0,8)$ のものの 3 つある。しかし、1 のノルムは 1 だから、負定値の $(0,8)$ はおこりえない。(4,4) は split だから、A として 2 行 2 列の行列環をとればよい。 $(8,0)$ は A が定符号四元数環、$\mu = -1$ ととればよい。

Cayley algebra C について x, $y \in C$ をとり、$\mathrm{End}(C)$ の元 $D_{x,y} = [L(x), L(y)] + [L(x), R(y)] + [R(x), R(y)]$ をとると、これは $\mathrm{Der}(C)$ の元であり、inner derivation は皆このかたちの線形結合で書ける。また、$\mathrm{Der}(C)$ の元は皆 inner である。(cf. [25] p.87.) この事実の証明はそれほどやさしくはない。われわれは derivation の作用を左からにするなど、Schafer とは若干見かけが違っているので参考のために証明を書いてみよう。

以下しばらく V は任意の alternative algebra とする。

Lemma 4.4 *alternativ algebra* V の元 x*,* y*,* z について *commutator* $[x, y] = xy - yx$*, associator* $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ なる記号を用いて

$$
\begin{aligned}
[L(x), R(y)]z &= (x, y, z) & (1)\\
[L(x), L(y)] &= L([x, y]) - 2[L(x), R(y)] & (2)\\
[R(x), R(y)] &= -R([x, y]) - 2[L(x), R(y)] & (3)\\
D_{x,y} &= L([x, y]) - R([x, y]) - 3[L(x), R(y)] & (4)\\
L(x)L(y) + L(y)L(x) &= L(xy + yx) & (5)\\
R(x)R(y) + R(y)R(x) &= R(xy + yx) & (6)\\
[[L(x), L(y)], L(z)] &= L([[x, y], z]) - 2L((x, y, z)) & (7)\\
[L(x), R(y)] &= [R(x), L(y)] & (8)
\end{aligned}
$$

と書ける。

証明: $z \in V$ に対し、定義どおり計算して、$[L(x), R(y)]z = x(zy) - (xz)y = -(x, z, y)$ だが、Cayley algebra は alternative algebra だから、これは (x, y, z) になる。これを利用して

$$
\begin{aligned}
[L(x), L(y)]z = x(yz) - y(xz) &= -(x, y, z) + (xy)z + (y, x, z) - (yx)z \\
&= [x, y]z - 2(x, y, z) = L([x, y])z - 2[L(x), R(y)]z.
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
[R(x), R(y)]z = (zy)x - (zx)y &= (z, y, x) + z(yx) - (z, x, y) - z(xy) \\
&= z[y, x] - 2(x, y, z) = -R([x, y])z - 2[L(x), R(y)]z.
\end{aligned}
$$

この (3), (4) により $D_{x,y}$ の定義を書き換えて、(4) を得る。$z \in V$ に対して、

$$\begin{aligned}(L(x)L(y)+L(y)L(x))z &= x(yz)+y(xz)\\ &= -(x,y,z)+(xy)z-(y,x,z)+(yx)z=(xy+yx)z.\end{aligned}$$

などより (5) を得る。よって

$$\begin{aligned}&[[L(x),L(y)],L(z)]\\ &= L(x)L(y)L(z)-L(y)L(x)L(z)-L(z)L(x)L(y)+L(z)L(y)L(x)\\ &= L(x)(L(y)L(z)+L(z)L(y))+(L(y)L(z)+L(z)L(y))L(x)\\ &\quad -(L(x)L(z)+L(z)L(x))L(y)-L(y)(L(x)L(z)+L(z)L(x))\\ &= L(x)L(yz+zy)+L(yz+zy)L(x)-L(xz+zx)L(y)-L(y)L(xz+zx)\\ &= L(x(yz+zy)+(yz+zy)x)-L((xz+zx)y+y(xz+zx)).\end{aligned}$$

しかし、

$$\begin{aligned}&x(yz+zy)+(yz+zy)x-(xz+zx)y-y(xz+zx)\\ &= -(x,y,z)+(xy)z-(x,z,y)+(y,z,x)+(z,y,x)\\ &\quad +z(yx)-(z,x,y)-z(xy)+(y,x,z)-(yx)z\\ &= [[x,y],z]-2(x,y,z)\end{aligned}$$

より (6) を得る。また

$$[L(x),R(y)]z=x(zy)-(xz)y=-(x,z,y)=-(y,z,x)=[R(x),L(y)]z.$$

証明終わり。

Lemma 4.5 V が *alternative algebra* ならば、$x,\ y \in V$ に対して

$$D_{x,y}=[L(x),L(y)]+[L(x),R(y)]+[R(x),R(y)]$$

は *inner derivation* である。

証明 : derivation であることだけを示せばよい。D が derivation というのは、定義から明らかなように

$$[D,L(x)]=L(Dx)$$

が任意の $x \in V$ について成り立つことといっても同じである。よって前の補題 (2), (3) より

$$D_{x,y} = L([x,y]) - R([x,y]) - 3[L(x), R(y)]$$

だから、

$$\begin{aligned}
&2[D_{x,y}, L(z)] \\
&\quad = 2[L([x,y]), L(z)] - 2[R([x,y]), L(z)] - 6[[L(x), R(y)], L(z)] \\
&\quad = 3([L([x,y]), L(z)] - 2[[L(x), R(y)].L(z)]) - [L([x,y]), L(z)] - 2[R([x,y]), L(z)] \\
&\quad = 3[[L(x), L(y)], L(z)] - [L([x,y]), L(z)] - 2[L([x,y]), R(z)] \\
&\quad = 3[[L(x), L(y)], L(z)] - [L([x,y]), L(z) + 2R(z)] \\
&\quad = 3[[L(x), L(y)], L(z)] - L([x,y], z]) \\
&\quad = L(2[[x,y], z] - 6(x,y,z)) \\
&\quad = 2L(([x,y], z] - 3(x,y,z)).
\end{aligned}$$

しかし、

$$D_{x,y} z = [[x,y], z] - 3(x,y,z)$$

であるから、

$$[D_{x,y}, L(z)] = L(D_{x.y} z)$$

となる。よって derivation である。証明終わり。

Alternating algebra の inner derivation は一般にはこの形の線形結合よりも多いかもしれないが、次が成り立つ。(cf. Schafer p. 78.)

Proposition 4.6 D が単位元を持つ *Alternating algebra* A の *inner derivation* であるための必要十分条件は

$$D = R_g - L_g + \sum D_{x,y}$$

の形に限る。ただし、ここで g は V の *nucleus* の元である。

A の Nucleus $G(A)$ というのは、

$$G(A) = \{g \in A; (g,x,y) = (x,g,y) = (x,y,g) = 0 \text{ for all } x,\ y \in A\ \}$$

と定義される。多元環の Nucleus は結合代数になることが証明できる。(Schafer p. 13).

Cayley algebra に関していえば、$C=A^2$ として、$g=a+bj,\ x\in A,\ y=j$ とするとき $(g,x,j)=(a,x,j)+(bj,x,j)$ において、2つの項はそれぞれ Aj と A に属するから線形独立であり $(g,x,j)=0$ ならば $(a,x,j)=(bj,x,j)=0$ である。$(a,x,j)=[a,x]j=0$ for all $x\in A$ ならば、a は A の中心の元であって、$a\in F$. $(bj,x,j)=(bj)(xj)-((bj)x)j=\mu\bar{x}b-((b\bar{x})j)j=\mu\bar{x}b-\mu b\bar{x}=\mu[\bar{x},b]=0$ だから、$b\in F$ でもある。しかし $b\neq 0$ ならば、$(bj,x,y)\neq 0$ なる $x,y\in A$ があるから、$b=0$, よって Nucleus は F である。よってこの場合は inner derivation は $\sum D_{x,y}$ しかないことになる。

Theorem 4.7 任意の *Cayley algebra* C について、$Der(C)$ は14次元の単純リー環である。(ただし F の標数はゼロとしている。) また、$Der(C)$ の元は $D_{x,y}$ の和で書ける。

証明はそう短くはない。文献がはっきりしているので (cf. Jacobson [15] p. 14) 省略するが少し説明を加える。体と拡大して考えてもよいので、閉体上で A は2次行列環として考えればよい。行列のベキ等元 $e_1,\ e_2$ をとって、$D_0(C)$ を $De_1=0$ となる derivation のなすベクトル空間とする。$e_2=1-e_1$ より、alternative の条件より、$x\in C$ について $(e_1,x,e_2)=0$ であり、e_iCe_j は well defined である。まず $Der(C)$ を記述する。

$$\begin{aligned}D_1 &= \{D_{e_1,a}; a\in e_1Ce_2\},\\ D_2 &= \{D_{e_2,b}; b\in e_2Ce_1\}\end{aligned}$$

とおくと

$$Der(C)=D_0\oplus D_1\oplus D_2$$

である。ただし $\oplus$ は加群としての直和。$\dim D_1=\dim D_2=3$, $\dim D_0=8$. ここで D_0 は e_iCe_j 上の作用に制限すると、既約忠実に作用し、結果的に 3×3 行列で trace 0 のリー環と同型になる。$Der(C)$ のイデアルとこれらとの intersection などを考えて証明する。

5 quartic Cayley algebra

D_4 型の Lie 環を与えるには、quartic Cayley algebra という Cayley algebra の1変種、以上のいわば古典的な Cayley algebra に似てはいるが、実際にはことなる Algebra を考える必要が生じる。(すなわち名前に

反して、quartic Cayley algebra は Cayley algebra ではない。）これを説明する。文献は Allison [3] による。

まず A を体 F 上の 4 次元分離的可換結合的代数とする。（単位元を持つと仮定する。）すなわち、F 上の線形空間としての次元が 4 次の積について結合律と交換律を満たす algebra で、A の任意の元の F 上の最小多項式が重根を持たないとする。言い換えると、$A \otimes_F \overline{F} = \overline{F}^4$ ($\overline{F}$ は F の代数閉包) となる、代数である。たとえば、F の 4 次拡大体や 2 次拡大の直和などがそうである。A は有限次元の power associative であるから、generic characteristic polynomial や generic trace t_A が定義される。A から A への写像 θ を

$$\theta(a) = -a + \frac{1}{2}t_A(a)$$

と定義する。これはあきらかに F 上の線形写像であり、$F1 \subset A$ 上は恒等写像である。さらに $\theta(\theta(a)) = a$ である。しかし、θ は一般に A の involution ではない、すなわち $\theta(ab)$ と $\theta(b)\theta(a)$ は等しいとは限らない。たとえば 4 次体などを考えれば、θ が自己同型でないのは明らかである。さて、A と $\mu \in F^\times$ から、Cayley Dickson Process と似た方法で、あたらしい algebra をつくる。A^2 上に

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \mu\theta(a_2\theta(a_4)), \theta(a_1)a_4 + \theta(\theta(a_2)\theta(a_3))$$

と積を入れる。

$$\overline{(a_1, a_2)} = (a_1, -\theta(a_2))$$

とおくと、これは A^2 上今定義した積に対して involution になることは計算すればわかる。この involution つきの代数を quartic Cayley algebra とよび $CD(A, \mu)$ と書く。これは非結合的な代数である。$CD(A, \mu)$ 内の演算による commutator を $[x, y] = xy - yx$, associator を $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ とおく。また x, $y \in CD(A, \mu)$ に対して、$CD(A, \mu)$ の線形変換 $D_{x,y}$ を

$$D_{x,y}(z) = [z, y, x] - [z, \overline{x}, \overline{y}] + \frac{1}{3}[[x, y] + [\overline{x}, \overline{y}], z]$$

と定義すると、これは derivation（もちろん inner derivation) になることが知られている。この $D_{x,y}$ (x, $y \in CD(A, \mu)$ で張られるベクトル空間は 2 次元の Lie 環になる。これを $\mathrm{Inder}(CD(A, \mu))$ と書く。

6 Jordan Algebra

単位元の存在する F-algebra V で

$$(1) \qquad xy = yx$$
$$(1) \qquad x^2(xy) = x(x^2y)$$

となるものをジョルダン代数という。たとえば、A が F-代数のとき、A の新しい積を $x \circ y = (xy + yx)/2$ と定義するとこの積に関して、A は Jordan 代数になる。これを A^+ を書くことにする。一般に、ジョルダン代数は power associative algebra であり、元の最小多項式、トレース、ノルム（行列式）などが自然に定義される。

一般の Jordan 代数 V の元 x, y, z について

$$L([x, y, z]) = -[[L(x), L(z)], L(y)]$$

が成り立つことが知られている (FK p. 36。)（ただし $[x, y, z]$ は associator $(xy)z - x(yz)$。）この式の応用として、a, b について、$D_{a,b} = [L(a), L(b)]$ とおくと、これが derivation であることが示される（FK loc. cit.）V の inner derivation は、すべてこの形の元の和で書ける。実際、Jordan 代数では Lie multiplication algebra はいつでも $\mathcal{L}(V) = L(V) + [L(V), L(V)]$ である。なぜなら、前の式より $[[L(V), L(V)], L(V)] \subset L(V)$ であり、また、$[[L(V), L(V)], [L(V), L(V)]] \subset [L(V), L(V)]$ も次のようにしてわかるからである。x, y, z, $w \in V$ について、ヤコービ律より

$$[[L(x), L(y)], [L(z), L(w)]] = -[[L(y), [L(z), L(w)]], L(x)] - [[[L(z), L(w)], L(x)], L(y)]$$

であり、さらに上で与えた等式よりこれは

$$-[L([z, y, w]), L(x)] + [L([z, x, w]), L(y)]$$

に等しいから $[L(V), L(V)]$ の元になる。よって $L(V)$ で生成される最小の Lie 代数は $L(V) + [L(V), L(V)]$ である。さらには $L(x)$ が derivation になるのは、V の単位元を考えれば、$x = 0$ のときのみであることがわかるからである。繰り返すと、前節の定理を考慮に入れると、V が単純環であるとき

$$Der(V) = [L(V), L(V)]$$

である。実際は、$V^0 = \{v \in V; tr(v) = 0\}$ とおくと、少なくとも標数がゼロなら $V = Fe \oplus V^0$ であり、$Der(J) = [L(V), L(V)] = [L(V^0), L(V^0)]$

である。ジョルダン代数 J が単位元を持つ結合的代数 B より $J = B^+$ として得られているとすると、$Der(J) = [B, B]$ となる。実際、ともに inner derivation であり、$Der(J) = [L(J), L(J)]$ であるが、$[L(a), L(b)]$ は $(L(a)L(b) - L(b)L(a))(x) = ad([a, b])(x)$ となり、$Der(J) = [B, B]$ はよい。さらには前に述べたように $Der(B) = \{ad(b) : b \in B\}$ であるが、B が有限次元ならば、power associative algebra の一般論により、generic なトレースが定義され、F の標数 0 ならば、$B = F \oplus B^0$ ($B^0 = \{b \in B; tr(b) = 0\}$) となっている。$ad(F) = 0$ は明らかだから、$Der(B) = \{ad(b); b \in B, tr(b) = 0\}$ でもある。いずれにしても $[B, B] \subset Der(B)$ であるが、$Der(B)$ が単純なら $Der(B) = [B, B]$ である。あるいは B が半単純ならそうである。

代数体上の中心的単純ジョルダン代数の分類は完全に知られているがここでは述べない。たとえば [16] を参照されたい。

ジョルダン代数のノルムを保存する群に関する定理を引用しておく。階数 r の power associative algebra の generic norm $N(x)$ は r 次であるが、これから、

$$N(x_1, ..., x_r) = \frac{1}{r!} \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \sum_{i_1 < \cdots < i_j} N(x_{i_1} + \cdots + x_{i_j})$$

とおいて、r 多重線形写像をつくっておく。

Theorem 6.1 ([17] Volume 2, p. 396, p. 399) F を標数 *0* の体、J を F 上中心的単純ジョルダン代数とする。J の *rank* を r、ノルム（固有多項式の定数項 $\times(-1)^r$、すなわち $\det$*)* を N と書く。J の単位元を e と書き、トレース *0* の部分加群を J^0 と書く。

1. $\eta \in GL(J)$ が J の自己同型であるための必要十分条件はすべての $x \in J$ について $N(\eta(x)) = N(x)$ かつ、$\eta(e) = e$ となることである。

2. N を自然に多重線形化したものを $N(x_1, ..., x_r)$ とする。すると $T \in End(J)$ について、

$$N(T(x_1), ..., x_r) + N(x_1, T(x_2), ..., x_r) + \cdots + N(x_1, ..., T(x_r)) = 0$$

であることと、ある c, a_i, $b_i \in J^0$ について $T = L(c) + \sum_{i=1}^{m} [L(a_i), L(b_i)]$ となることは同値である。これは *Lie* 環になるが、これはノルムを保存するが、単位元 e は保存しないかもしれない $GL(V)$ の元のなす *Lie* 群の *Lie* 環である。

$\{$ 上の 2 番目の条件が成り立つような T のなす加群 $\} \cong J^0 \oplus \mathrm{Der}(J)$ でもある。実際にはこれは単に加群なわけではなく、ふつうの bracket 積について Lie 環になる。これは後で述べる Tits construction のひとつであり、E_6 型の一部などをこれで記述することもできる。

このように、何らかの斉次多項式を不変にするという形での特徴づけはほかにもある。たとえば E_7 型について exceptional Freudenthal triple system というものが知られている。これはこれで面白いが、しかし、これはすべての F-form を説明するわけではない。

7 Exceptional Jordan Algebra

F 上の中心的単純 Jordan 代数であって、特に結合的代数 A から A^+ として得られる Jordan 代数に埋め込めないものを exceptional という。これはいつでも F 上 27 次元である。特に F を代数体とすると例外ジョルダン代数は、reduced（係数体を代数閉体まであげたときと直交べき等元をなす最大個数が等しい、あるいは今の場合、単位元以外に巾等元がある）となり、その構造は次のように書かれる。$M_3(F)$ 内の対角行列

$$I = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

をとり、F 上の Cayley 代数 C について

$$\mathrm{Herm}_3(C, I) = \{X \in M_3(C);\ {}^t\bar{A} = I^{-1}AI\}$$

とおく。積の演算を

$$x \circ y = (xy + yx)/2$$

で定義する。任意の reduce exceptional Jordan algebra は適当な C と I を用いてこのように書ける。特に C が split Cayley で、I が単位行列ならばもっとも単純であろう。

Theorem 7.1 *(1)* 2 つの *reduced simple exceptional Jordan algebra* $\mathrm{Herm}(C_1, I_1)$ と $\mathrm{Herm}(C_2, I_2)$ について、ノルム形式が相似なこと、たがいに *isotope* なこと、$C_1 \cong C_2$ なことは同値である。
(2) 2 つの *reduced simple exceptional Jordan algebra* $\mathrm{Herm}(C_1, I_1)$ と

$\mathrm{Herm}(C_2, I_2)$ 同型であるための必要十分条件は $C_1 \cong C_2$ であり、かつ $x \in \mathrm{Herm}(C_i, I_i)$ に対して $\mathrm{tr}(x^2)$ を２次形式と見なしたときに、これが２次形式として同型であることが必要十分である。

特に C が split ならば２次形式は皆同値であり、C が division ならば、実素点では $I = (1, 1, 1)$ と $I = (1, 1, -1)$ の２つに皆同値である。よって、２次形式の Hasse の原理より代数体上の中心的単純例外ジョルダン代数は高々 3^t 個存在する。ただし t は F の実素点の個数である。実際には、ちょうど 3^t 個存在する。これは、Cayley algebra を 2^t 個、うまく選んでおき、さらに involution を決める対角行列として、実素点での符号分布がうまいものをとればよいだけであるから、容易にわかる。

reduced でない exceptional simple Jordan algebra は一般の体上では存在する。その構成は Tits によりすべてかたがついているようである。([16]

8 Tits construction

Tits による、例外 Lie 環、ないしは一部の古典 Lie 環の一般的な構成法が知られている。 これを解説する。F を標数 0 の体とする。A を F 上の composition algebra 、J を F 上の中心的単純ジョルダン代数で rank が 1 または 3 のものとする。(rank 1 というのはすなわち F 自身のことである。）A^0, J^0 でそれぞれ A, J のトレース 0 の submodule とする。F 上のベクトル空間 $T(A, J)$ を

$$T(A, J) = \mathrm{Der}(A) \oplus A^0 \otimes J^0 \oplus \mathrm{Der}(J),$$

とベクトル空間の直和で定義する。

$T(A, J)$ には次の演算で、Lie 環の構造がはいる。まず、$\mathrm{Der}(A)$ と $\mathrm{Der}(J)$ は前に述べたように Lie 環である。$\mathrm{Der}(A) \oplus \mathrm{Der}(J)$ の部分は Lie 環としての直和とする。すなわち $D \in \mathrm{Der}(A)$ と $E \in \mathrm{Der}(J)$ については $[D, E] = 0$ とおくのである。その他についてはまず、記号を準備する。$A \neq F$ のとき、a, $b \in A$ について、

$$a * b = ab - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(ab)1,$$

また、J が rank 3 のとき x, $y \in J$ について

$$x * y = xy - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(xy)1$$

。と書くことにする。ここで Tr は有限次元の power associative algebra の一般論で定義される generic trace である。ゆえにもっと一般的な書き方をすれば $X * Y = XY - r^{-1}\mathrm{Tr}(XY)1$ (r は algebra の rank, すなわち元の最小多項式の最大次数）としてもよい。$\mathrm{Tr}(X * Y) = 0$ である。さて、$D \in \mathrm{Der}(A)$, $E \in \mathrm{Der}(J)$ と $a \otimes x \in A_0 \otimes J_0$ については

$$\begin{aligned}
[a \otimes x, D + E] &= (Da) \otimes x + a \otimes (Ex), \\
[a \otimes x, b \otimes y] &= \frac{1}{12}\mathrm{Tr}(xy)D_{a,b} + (a * b) \otimes (x * y) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(ab)[L(x), L(y)]
\end{aligned}$$

と定義する。ここで、$D_{a,b} = [[L(a), L(b)] + [L(a), R(b)] + [R(a), R(b)]$ とおいている。

いくつか具体例を挙げる。

1. $J = F$ ならば、$J_0 = 0$, $\mathrm{Der}(F) = 0$ であるから、$T(A, J) = \mathrm{Der}(A)$ である。

2. $A = F$ ならば、$A^0 = 0$, $\mathrm{Der}(A) = 0$ であるから、$T(A, J) = \mathrm{Der}(J)$ である。

3. A が F 上 2 次ならば、$A^0 = F\alpha$ であり、$T(A, J) = \alpha J^0 \oplus \mathrm{Der}(J)$ である。

4. J が結合的代数 B より $J = B^+$ と得られているとすると、$\mathrm{Der}(B^+) = \mathrm{Der}(B) = \{ad(b); b \in B, tr(b) = 0\}$ であるから $\mathrm{Der}(J) \cong B^0$ と同一視できる。よって $T(A, J) = \mathrm{Der}(A) + (F + A^0) \otimes J^0 = \mathrm{Der}(A) + A \otimes J^0$ と見なせる。

Tits-Freudenthal magic square:

$A \backslash J$	$\mathbb{R}$	$H_3(\mathbb{R})$	$H_3(\mathbb{C})$	$H_3(\mathbb{H})$	$H_3(\mathbb{O})$
$\mathbb{R}$	0	A_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	0	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{H}$	A_1	C_3	A_5	A_6	E_7
$\mathbb{O}$	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8

9　その他の非結合代数

この節では Allison [3] にでてくる、以上のいずれとも異なる algebra について述べる。可換な分離 4 次代数 A と $\mu \in F^\times$ に対して Quartic Cayley を前のように定義し、$F^\times$ の元を成分とする対角行列 γ をひとつ取る。

$$P = \{X \in M_3(CD(A,\mu)); \gamma^{-1}\,{}^t\bar{X}\gamma = -X,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

とおく。ただし、$\mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ と定義している。ここで

$$K(CD(A,\mu),\gamma) = \mathrm{Inder}(CD(A,\mu)) \oplus P$$

とおくと、これは Lie 環になる。積は、$D,\ E \in \mathrm{Inder}(CD(A,\mu)),\ X = (x_{ij}),\ Y = (y_{ij}) \in P$ に対して、

$$[(D,X),(E,Y)] = ([D,E] + \Delta_{X,Y}, DY - EX + [X,Y]_0)$$

と定義する。ここで、

$$\begin{aligned}
\Delta_{X,Y} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} D_{x_{ij},y_{ji}}, \\
DX &= DX = (Dx_{ij}) \\
[X,Y]_0 &= XY - YX - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(XY - YX)I.
\end{aligned}$$

ただし、I は単位行列。

10　例外 Lie 環の分類

この節では、標数 0 の体、または代数体上の例外 Lie 環の分類の一覧を述べることが目的である。この講演をサマースクールで行ったときには、既存の文献では E_6 だけ分類の結論が少し不十分な部分があった。これはのちに渡部隆夫氏によって補充されプレプリントが存在している。これについてはここでは述べない。あとは当時からすべて文献が完備していた。D_4 は一応の完全な分類は与えられてはいるが、あまり単純ではないので、わたしにはたとえば個数などがあまりうまく読み取れなかった。論文案内としては G_2 は Jacobson [13], F_4 は Tomber [28]、あるい

は Hijikata [11] であるが、これらについては易しいので、この論説で証明は（標準的な教科書の内容を既知とした上で）完全な解説をする。体は任意の標数 0 の体でよい。E_6 については Ferrar [9] であり、E_7 については Ferrar [8], [10] である。D_4 特に exceptional D_4 と呼ばれているものについては Allison [3] で完全に扱われている。また、E_8 については特に文献は見あたらないが、E_8 の Hasse 原理の確定した今となってはやさしいので、具体的に結論を与えておく。これらでは、体を代数体（または局所体）と仮定する。任意の標数 0 だとよくわからない。（実際かなり状況は複雑になるはずである。たとえば division の例外ジョルダン代数が存在するとか何とか。）なお、通常古典群と言われている、A, B, C, D 型だが、D_4 だけは少々特殊で、たとえば Jacobson [14] の分類からは除外されている。これは例外として、[3] で構成し分類されている。コホモロジー論としては、Satake [24] に完全に記述されている。これをもって分類と言うこともできるが、具体的に与えられる方が好ましいと思う。

Theorem 10.1 F を標数 *0* の体とする。*Cayley* 代数 C について、$\mathrm{Der}(C)$ は G_2 型の *Lie* 環であるが、逆に G_2 の *Lie* 環の任意の F-*form* は $\mathrm{Der}(C)$ *(*C は F 上の *Cayley* 代数）とかける。また、$\mathrm{Der}(C_1) \cong \mathrm{Der}(C_2)$ であるための必要十分条件は F 上の代数として $C_1 \cong C_2$ となることである。

F が代数体ならば、同型でないものの個数は（C が各実素点で division or split に応じて）2^t 個 (t は F の実素点の数）である。

Theorem 10.2 F を標数 *0* の体とする。F 上の中心的単純例外ジョルダン代数 J にたいし、$\mathrm{Der}(J)$ は F_4 型の *Lie* 環であるが、逆に F_4 の *Lie* 環の任意の F-*form* は $\mathrm{Der}(J)$ *(*J は F 上の中心的単純例外ジョルダン代数）とかける。また、$\mathrm{Der}(J_1) \cong \mathrm{Der}(J_2)$ であるための必要十分条件は F 上の代数として $J_1 \cong J_2$ となることである。

F が代数体ならば、同型でないものの個数は 3^t 個 (t は F の実素点の数）である。これは $J = \mathrm{Herm}(C, I)$ において C が各実素点で split の場合、および、division であって I が「正定値」のばあいと「不定符号」の場合の 3 通りだからである。

Theorem 10.3 F を代数体とする。E_8 型 *Lie* 環の任意の F-*form* は適当な F 上の *Cayley* 代数 A と 中心的単純例外ジョルダン代数 $J = \mathrm{Herm}(C, I)$ に対して、*Tits construction* $T(A, J) = \mathrm{Der}(A) + A_0 \otimes J_0 + \mathrm{Der}(J)$ で与

えられる。$T(A_1, J_1) \cong T(A_2, J_2)$ であるための必要十分条件は、各実素点 ν でこれらが同型であることである。具体的には、
(1) A, C *division at* ν*,* I 単位行列、
(2) A *division,* C *split, at* ν*,* I 単位行列、
(3) A, C *split at* ν*,* I 単位行列
ととればよい。

以上で、F 上の E_8 の個数は、3^t 個（t は F の実素点の数）がわかった。なお、上記で各実素点での与え方であるが、(2), (3) のかわりに
(2)' A split, C division, $I = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$ または単位行列
(3)' A division, C division, $I = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$
としてもよい。
さて、以上では代数体 F について F-form は実素点のみで決まっており有限個しかなかった。しかし、 E_6、E_7 についてはもっと複雑であり、無限個になる。

Theorem 10.4 (Ferrar [8]) F を代数体とする。E_7 型 *Lie* 環の任意の F-*form* は *Tits construction* $T(A, J) = \mathrm{Der}(A) + A^0 \otimes J^0 + \mathrm{Der}(J)$ （A は F 上の *4* 元数環、J は F 上の中心的単純例外ジョルダン代数）になる。$T(A_1, J_1) \cong T(A_2, J_2)$ であるための必要十分条件は
(1) F 上 $A_1 \cong A_2$ であり、かつ
(2) 各実素点で同型
の *2* つの条件で与えられる。$L(A, J)$ の実素点での同型類は $J = \mathrm{Herm}(C, I)$ とすると
(1) A, C が *split*
(2) A が *split* で C が *division*、 I は任意
(3) A が *division* で C が *split (*または C が *division* で $I = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$*)*
(4) A が *division* で C が *division,* I が単位行列
の *4* 通りである。

E_6 の Lie 環は外部自己同型が存在する。閉体上の Lie 環から、内部自己同型による twist で得られるのを E_6 型（または E_{6I} 型）, それ以外を ${}^2E_6$ 型（または E_{6II} 型）ということにする。補助的に中心的単純例外ジョルダン代数 J に対して $\mathcal{L}^0(J) = L(J^0) \oplus [L(J^0), L(J^0)]$ とおく。これはほぼ $T(F^2, J)$ である。$T(C, M_3(F)) \cong \mathcal{L}^0(\mathrm{Herm}(C, 1_3))$ である。（ここで、$M_3(F)$ は $M_3(F + F)$ で involution 不変な元と解釈すればよい。）

Theorem 10.5 (Ferrar [9]) 代数体 F 上の E_6 型の *Lie* 環の任意の F *form* は、適当な *Cayley* 代数 C と $M_3(\bar{F})^+$ の F-*form* である中心的単純ジョルダン代数 J による *Tits construction* $T(C,J) = Der(C) \oplus C^0 \otimes J^0 \oplus Der(J) \cong Der(C) \oplus C \otimes J^0$ で書ける。もし $T(C_1, J_1) \cong T(C_2, J_2)$ ならば $C_1 \cong C_2$ である。さらに $M_3(\bar{F})$ の F-*form* B について $J_1 = B^+$ となっていれば、J_2 もそうであり、$J_1 \cong J_2$ である。(この場合がちょうど *type* E_{6I} である。)

上に述べたように、$E_{6,I}$ の一部(B = $M_3(F)$ となるもの)は $(\mathcal{L}')(\mathcal{J})$ (J は例外型中心的単純ジョルダン代数)とかける。E_6 については ${}^2E_6$ において、同型になるための条件は従来あまり明確に述べられていなかった。特に単に同型というだけだと、非常にはっきりしていなかった。$M_3(\bar{F})^+$ の　ジョルダン代数としての F-form は B^+ だけではないことに注意すべきである。すなわち第２種の involution を持つ algebra の symmetric element (involution で不変な元、つまりはエルミート行列のようなもの) からなるジョルダン代数がある。これが type E_{6II} である。上の定理ではこの部分の同型条件が不十分であって、改良する余地があった。ただし注意として、J が同型という条件は望めないことが知られている。いわゆる isotope でさえないという実例が知られている。) また、互いに inner isomorphic になるための条件については Hasse 原理が成り立つが、isomorphic というだけだと Hasse 原理は正しくないことが知られている。

現在は outer twist をこめた分類は前に述べたように渡部氏により解決されているのでそちらの文献を参照されたい。

次に D_4 を見る。F 上４次の分離的可換代数 A に対して、次のような代数を考える。$a \in A$ について、$\bigwedge^2 A$ の線形変換を $F_a(b \wedge d) = ac \wedge d + c \wedge ad$ と定義する。さらに $M_2(End(\bigwedge^2 A))$ の部分代数で、

$$\begin{pmatrix} F_b & 0 \\ 0 & F_{b^\theta} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mu I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される結合代数を Q とする。

$$R = \{F_b F_c ; b,\ c \in A, tr(b) = tr(c) = 0\} \text{ で生成される代数}$$

とする。R は F 上の３次分離的可換代数で、これを

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

と同一視すると、R は Q の中心であり、Q は R 上の「４元数環」になる。

Theorem 10.6 F を代数体とすると 、F 上の D_4 型の *Lie* 環はみな $K(CD(A,\mu),\gamma)$ の形にかける。ここで A, μ, γ などは *quartic Cayley algebra* のところで説明したとおりであるが、さらに μ を *totally negative,* γ を $\gamma = \mathrm{diag}(1,\gamma_2,1)$ $(\gamma_2 \in F^\times)$ ととれる。同型であるための条件は
（１）対応する Q が同型であり
（２）A_ν が 1 次直和因子を持つような実素 ν に対して、γ_2 が同符号となることである。（ただし同型ならば一方の A が ν で一次直和因子を持てば他方もそうである。）

同型であるための条件は、やや複雑であり、たとえば個数がいくつであるのか等、わたしには読み取れる形には見えなかった。原論文を参照されたい。

11 Algebra の decent

以下、G_2 と F_4 の場合にほぼ完全な証明をつけることをめざす。前と同様、F を標数 0 の可換体、$\bar{F}$ を代数的閉包、P を F の有限次ガロア拡大とする。V を $\bar{F}$ 上のベクトル空間とする。V は自然に F ベクトル空間とも見なせるが、この意味での V の F 線形部分空間 V_1 であって $V_1 \times_F \bar{F} = V$ となるものを分類する。分類すると言っても、ベクトル空間は次元が同じならばみな同型だから別に抽象的に F 同型類を考えようとしているわけではない。V 内の F subspace として、全部数え上げようとしているのである。$s \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を一つ固定する。ガロア群の作用は伝統にしたがって右作用で書く。（うっかり最初左作用で書いてみたら、思いのほか訂正すべきことが多くなって、伝統の記号になじまなくなってしまった。）V から V への F 線形同型写像 U_s をこの作用にあわせるために右からの作用で書く。任意の $a \in \bar{F}, x \in V$ について $(ax)U_s = a^s U_s(x)$ となるとき、U_s を $\bar{F}$ semi-linear ということにする。V は代数多様体として $\bar{F}$ の作用がついている分だけ通常より複雑になっている。

Theorem 11.1 次の 2 つの集合は 1 対 1 に対応する。
（１）$\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ から*,* $\bar{F}$*-semi-linear mappings* の族 U_s $(s \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F))$ への連続写像で、*(1)* $U_1 = 1$*, (2)* $U_{st} = U_s U_t$ となるもの。
（２）V の部分 F 線形空間 V_1 で、$V_1 \otimes_F \bar{F} = V$ となるもの。
具体的な対応は U_s に対しては、$V_1 = \{v \in V; vU_s = v\}$ とおけばよい。逆に V_1 があれば、$(v \otimes a)U_s = v \otimes a^s$ として F 線形に延ばせばよい。

証明 :（2）ならば、V_1 の F 上の基底は $\bar{F}$ 上の基底でもある。よって、$a \in \bar{F}, v \in V_1$ について、$(av)U_s = a^s v$ と定義すれば、U_s が（1）をみたすのは明らかである。次に（1）を仮定する。$V_1 = \{v \in V; vU_s = v\}$ とおく。$x \in V$ をひとつ固定すると、$s \to U_s$ は連続であるから $xU_s = x$ となる $s \in Gal(\bar{F}/F)$ は $Gal(\bar{F}/F)$ ないで finite index である。これに対応する体の F 上のガロア閉包を L とし、$G = Gal(L/F)$ とおく。$a \in L$ と $x \in V$ について $y = \sum_{s \in G} a^s x U_s$ とおくと $t \in G$ について、$yU_t = \sum_{s \in G} a^{ts} x U_{ts} = y$ となるから $y \in V_1$. 実際は $t \in Gal(\bar{F}/F)$ についても a^s 上には G の元を通じて作用するので、任意の $t \in Gal(\bar{F}/F)$ についても、a^{ts}, $xU(ts)$ は G を通じた作用と思ってよく $yU_t = y$ となる。よって $y \in V_1$ である。L/F の基底を $a_1,...,a_n$ とし、$y_i = \sum_{s \in Gal(L/F)} (a_i)^s x U_s$ とおくと、$y_i \in V_1$. また、$((a_1)^s, (a_2)^s, ..., (a_n)^s)$ $(s \in Gal(L/F))$ は線形独立であることはよく知られているので、xU_s は y_i の L 線形結合になる。すなわち、x も $y_i U_s^{-1} = y_i$ の L 線形結合になるわけである。よって、任意の V の元は V_1 の元の $\bar{F}$ 線形結合でかける。よって、V_1 は L 上線形独立な dim(V) 個のベクトル $a_1, \ldots, a_n$ がある。V_1 の F 上の次元はやはり dim(V) と一致する。実際、$a_{n+1} \in V_1$ を上に付け加えても F 上独立とすると $a_{n+1} = \sum_{i=1}^n c_i a_i$ と書け、$U(s)$ を作用させて、$s(c_i) - c_i = 0$ がわかる。すなわち、$c_i \in F$ となり、独立に反する。証明終わり。

この descent data のとり方と、A. Weil による、一般的な代数多様体の定義体に descent に関する criterion の関係を少し見ておく。V を L 上の代数多様体として、$s \in G = Gal(L/F)$ について V から V^s への同型 f_s が cocycle condition $f_{st} = (f_s^t) f_t$ を満たせば F 上の代数多様体 V_1 で、L 上 V と同型なものが取れるのであった。もう少し正確に言えば、cocycle $\{f_t\}$ があるとき、ある L 上の isomorphism $f : V_1 \to V$ で、$f^s = f_s f$ となるものが、存在する。

今のわれわれの場合、V は単なるベクトル空間だから $V^s = V$ にしかならない。しかし、U_s は明らかに代数多様体の意味での morphism ではないから、これがたとえば f_s の変わりになるわけではない。このずれを一応説明しておく。V の座標を指定して、点集合上での G の作用を固定しておく。(たとえば、$V = L^n$ として、$(a_1, \ldots, a_n)^s = ((a_1)^s, \ldots, (a_n)^s)$ など。) descent data $\{U_s\}$ が与えられていれば、これに対して V_1 が決まり、V_1 の基底 $e_1,...,e_n$ をとれば $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ とするとき、$xU_s = \sum_{i=1}^n s(c_i) e_i$ となる。ここで、$(xU_{s^{-1}})^s = \sum_{i=1}^n c_i (e_i)^s$ である。$(e_i)^s$ はまた V の基底であるから、L の行列 $B(s)$ により、$(e_i^s) = B(s)(e_i)$ と書ける。$x \in L^m$ に

対して、$f_s(x) = (xU_{s^{-1}})^s = B(s)B^{-1}x$ とおけば、$f_{st} = (f_s^t)f_t$ となる。実際、$f_{st}(x) = (xU_{t^{-1}s^{-1}})^{st} = ((xU_{t^{-1}})U_{s^{-1}})^{st}$ であり、$f_t(x) = (xU_{t^{-1}})^t$ だから、$y = xU_{t^{-1}}$ とおいて、

$$f_{st}(x) = f_s^t(y^t) = (f_s(y))^t = (yU_{s^{-1}})^{st} = (xU_{t^{-1}}U_{s^{-1}})^{st}$$

となり、示された。これにより $f_{st} = (f_s^t)f_t$ となる。逆に f_s が V から V への vector space としての algebraic morphism ということは、線形写像ということであるから、行列 $A(s)$ を用いて、$f_t(x) = A(s)x$ とおくと、つまりは $A(st) = (A(s))^tA(t)$ であり、$GL_n(L)$ valued の 1-cocycle である。$H^1(Gal(L/F), GL_n(L)) = \{1\}$ であるから、$A(s) = B^sB^{-1}$ となる行列 $B \in GL_n(L)$ が存在する。$B = (e_1, \ldots, e_n)$ と B の列ベクトルを書くと、

$$A(s)(\sum_{i=1}^n c_ie_i) = (c_1, ..., c_n)B^s$$

であるから、$x = \sum_{i=1}^n c_ie_i$ とおくと $xU_s = \sum_{i=1}^n c_i^se_i$ とおくとき U_s は descent data で、$f_s(x) = (xU_{s^{-1}})^s$ となる。

1 cocycle $\{f_s\}$ で記述できる対象は，より正確に言えば、次のようになる。L 上の代数多様体 V に対して、V_i を F 上の代数多様体、f_i を V_i から V への L 上の同型とする。このような、(V_1, f_1) と (V_2, f_2) が、F 上同型というのを、ある V_1 から、 V_2 への F 上定義された同型 h で、$f_1 = f_2h$ となるものがとれることとすると、1-cocycle $\{f_s\}$ は、このような意味での F 上の同型類と 1 対 1 に対応する。また、V と L 上同型な V_1, V_2 を、埋め込みの写像と関係のない V_1 と V_2 の F 上の同型で分類すると、これは 1-cocycle の cohomology の意味での同型類に 1 対 1 に対応する。すなわち $\{f_s\}$ と $\{g_s\}$ が、V のある線形同型 H について、$H^sf_sH^{-1} = g_s$ をすべての s について満たすとき、同値というのであった。これは F 上の「抽象的」同型類と対応する。（もちろん今の場合みな同型になるが。）

V に algebra の構造も入っているときは、同型類の記述も次のようにできる。

Theorem 11.2 V を $\bar{F}$ 上の代数とする。次の 2 つは集合として自然に 1 対 1 である。

（１）V の *semi-linear mapping* でかつ *F* 上の *algebra* しての同型写像の族 U_s *(*$s \in Gal(\bar{F}/F)$*)* で、*(1)* $U_1 = 1$, *(2)* $U_{st} = U_sU_t$ となるもの。

（２）V の F 線形部分空間 V_1 で $V_1 \otimes_F \bar{F} = V$ かつ *subalgebra* になるも

の。
さらに、V_1 と V_2 が *(2)* の通りとし、対応する *(1)* の族を U_s, V_s とすると、V_1 と V_2 が F-*algebra* として同型であるための必要十分条件は、V の $\bar{F}$ 上の *algebra* としての同型写像 A が存在して、任意の $s \in Gal(\bar{F}/F)$ について $AU_sA^{-1} = V_s$ となることである。

簡単のために上の (1) の条件を満たす族 $\{U_s\}$ を descent data と呼ぶことにする。

Lemma 11.3 $V_1 \subset V$ の *descent data* を U_s とすると、$Der(V_1)$ の *descent data* は $IntU_s$ である。

証明:ここで $Der(V_1)$ というのは、V_1 の F 線形変換で $D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$ であるものである。これは実際には $\bar{F}$ 線形に延ばせば $Der(V)$ の元で V_1 を不変にするものと言っても同じである。V の自己同型写像 $U(s)$ ($s \in Gal(\bar{F}/F)$) について、$D \in Der(V)$ に対して、$(IntU(s))(D) = U(s)DU(s)^{-1}$ とおくと、$(IntU(s))(D) \in Der(V)$ であることが定義どおりに計算してただちにわかる。さらには $a \in \bar{F}$ と $x \in V$ について

$$(IntU(s))(aD)(x) = U(s)(aD)U(s)^{-1}(x) = U(s)(a(DU(s)^{-1}(x)) = a^s(IntU(s))(D)$$

がわかる。よって $IntU(s)$ は $Der(V)$ の descent data である。さらに $D \in Der(V_1)$ ならば、$x \in V_1$ について $Dx \in V_1$ であるが、このとき $U(s)x = x$, $U(s)(Dx) = Dx$ であるから、

$$(IntU(s)(D))(x) = U(s)DU(s)^{-1}(x) = U(s)(Dx) = Dx.$$

つまり、$(IntU(s))(D)$ と D は V_1 上で一致するが、V 上でも

$$U(s)DU(s)^{-1}\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = U(S)\sum_{i=1}^{n} s^{-1}(c_i)D(a_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i D(a_i).$$

よって、$(IntU(s))(D) = D$. 逆に $(IntU(s))(D) = D$ ならば、$U(s)D = DU(s)$ より、$U(s)D(x) = DU(s)(x)$ だから、$x \in V_1$ ならば $U(s)(Dx) = Dx$ となり、$U(s)$ が V_1 の descent data だから、$Dx \in V_1$ となる。証明終わり。
これを用いて次を証明する。

Theorem 11.4 V を $\bar{F}$ 上の代数とする。任意の $\mathrm{Der}(V)$ の（$\bar{F}$ 上の *Lie* 代数としての）自己同型写像 ϕ に対して $A \in \mathrm{Aut}(V)$ で $\phi(D) = \mathrm{Int}(A)(D) = ADA^{-1}$ ($D \in \mathrm{Der}(V)$）となるものがただ一つ存在すると仮定する。

このとき次が成り立つ。

(1) V の、F-*subalgebra* V_1, V_2 が $V_i \otimes_F \bar{F} = V$ $(i = 1, 2)$ であるとする。このとき、$\mathrm{Der}(V_1)$ と $\mathrm{Der}(V_2)$ が、F 上の *Lie algebra* として同型であるための必要十分条件は F 上の *algebra* としての同型 $V_1 \cong V_2$ が存在することである。

(2) V の F-*subalgebra* V_0 で $V = V_0 \otimes_F \bar{F}$ となるものが一つは存在すると仮定する。このとき L_1 が $\mathrm{Der}(V)$ の F 上の *Lie subalgebra* で $\mathrm{Der}(V) = L_1 \otimes_F \bar{F}$ なるものとすると V の F *subalgebra* V_1 が存在して、$L_1 = \mathrm{Der}(V_1)$ となる。

証明:(1) $\mathrm{Der}(V_1)$ から $\mathrm{Der}(V_2)$ への同型写像 ϕ に対して、$\phi = \mathrm{Int}(A)$ となる $A \in \mathrm{Aut}(V)$ をとる。V_1 と V_2 に対応する semi-linear 同型の族を U_s と V_s とする。すると $\mathrm{Der}(V_2)$ に対応する descent data は $\mathrm{Int} U_s$ でもあり、$\mathrm{Int}(A^{-1}V_S A)$ でもあり、よって $\mathrm{Int}(U_s) = \mathrm{Int}(A^{-1}V_s A)$. しかし、$\mathrm{Aut}(\mathrm{Der}(V))$ の $\mathrm{Aut}(V)$ の元への持ち上げの一意性より、実は $U_s = A^{-1}V_s A$. よって、$v \in V_1$ ならば $U_s v = v$ だが、$A^{-1}V_s A v = v$, すなわち $V_s A v = Av$ である。すなわち $Av \in V_2$. よって $V_1 \cong V_2$ である。
(2) V_0 の descent data を U_s とすると $L_0 = \mathrm{Der}_F(V_0)$ として、L_0 の descent data を u_s と書くと $u_s = \mathrm{Int} U(s)$ である。L_1 の descent data を v_s と書く。$u_s^{-1} v_s$ は、明らかに $\mathrm{Der}(V)$ の $\bar{F}$ linear isomorphism であるから、ある、$A(s) \in \mathrm{Aut}(V)$ があって、$u_s^{-1} v_s = \mathrm{Int} A(s)$ とかける。すなわち、$D \in \mathrm{Der}(V)$ に対して、$v_s(D) = u_s \mathrm{Int}(A(s))(D) = U(s)A(s)DA(s)^{-1}U(s)^{-1}$ である。$W(s) = U(s)A(s)$ とおいて、これが V の descent data であることをいう。v_s は descent data だから $v_1 = 1$, $v_{st} = v_s v_t$. $\mathrm{Aut}(\mathrm{Der}(V))$ は $\mathrm{Aut}(V)$ の unique な元からくるのだから、$W(1) = 1$, $W(st) = W(s)W(t)$. さらに $A(s)$ は $\bar{F}$ linear で、$U(s)$ は semi linear であるから、$W(s)$ も semi linear である。descent data $W(s)$ に対応する V の subalgebra を V_1 とすると、$\mathrm{Der}(V_1)$ の descent data は $\mathrm{Int}(W(s)) = v_s$ であるから、$L_1 = \mathrm{Der}(V_1)$ となる。証明終。

Corollary 1 F を任意の代数体とする。F 上の任意の G_2 型 *Lie* 代数は、F 上のある *Cayley* 代数 C の *derivations* $\mathrm{Der}_F(C)$ で与えられる。また、

F 上の任意の F_4 型の *Lie* 代数は、ある F 上の *Cayley* 代数に対する３次のエルミート行列 $\mathsf{Herm}(3, \mathsf{C})$ すなわち F 上の（ *reduced* な）例外型ジョルダン代数の *derivations* $\mathsf{Der}(\mathsf{Herm}(3, \mathsf{C}))$ で与えられる。また、これらの *Lie* 代数が F 上同型であるための必要十分条件は C が同型であること、または $\mathsf{Herm}(3, \mathsf{C})$ が同型であることが必要十分条件である。

証明：
(1) 任意の代数体 F 上に F 上 central な Cayley algebra が存在する。実際、定義の４元数環として、F 上次数２の行列環をとれば、いわゆる split Cayley が定義される。また、同じ Cayley algebra をもちいて、３行３列の Cayley hermitian をとって、F 上 central な例外型単純ジョルダン代数が存在することがわかる。以上で定理の条件の一部が示された。
(2) C を Cayley, J を F 上の例外型単純ジョルダン代数とするとき、$\mathsf{Der}(\mathsf{C} \otimes_{\mathsf{F}} \bar{\mathsf{F}})$ と $\mathsf{Der}(\mathsf{J} \otimes_{\mathsf{F}} \bar{\mathsf{F}})$ の Lie 代数としての自己同型は C および J の自己同型写像から得られる内部自己同型に限る。これがもともとの定理の重要な仮定であるが、これは証明は略す。根拠は G_2 と F_4 で、outer twist が存在せず、また、 center も trivial であることに基づく。
(3) 以上、２つの条件さえ整えば、あとは定理の主張の通りである。

12 結語

いくつか感想を述べたい。

1. 非結合代数というのはなかなか、奥が深い。Lie 環では、標数正では一般論はそのままではうまくいかないといわれているしかし、ジョルダン代数については、任意標数で考えることがいろいろ行われていて成功しているらしい。たとえば通常のジョルダン代数の定義は標数２ではいかにも都合が悪いので、${}^{t}\mathsf{XYX}$ のような算法に基礎をおいた quadratic Jordan というものが考えられている。また Jordan triple system も標数３などで、あきらかに問題が生じるので、Jordan pair の理論というのに書き換えられて閉体上の分類まで書かれている (Loos, Springer Lecture Note 460). これらはある種の純粋の代数であって、当然それなりの透明感があるし、極端な予備知識もあまりいらない。これらは趣味としてはなかなか面白そうと思う一方で、大勢の人間がやるべきことではないだろうとも思う。

2. 整数環の話も少し存在する。たとえば代数体上の Cayley algebra において、極大整数環の概念は普通に定義される。極大整数環が同型を除いていくつ存在するか（4 元数環でいうところの type number はいくつか）という問題は興味深いが、ほかの algebra と異なる本質的な問題は、局所体上、いったい極大整数環の同型類がいくつあるかということである。このような局所的な状態さえわかれば、global は単なる adelic group の類数問題に過ぎないからである。このあたりは私も一度考えてみて、Cayley algebra では non arichimedean local field 上ではただひとつで、maximal order は $\mathcal{Q}$ 上でもやはりただひとつという結論を出したことがあるが、([12]), 残念ながらこれは私が最初ではなく、Blie and Springer [4] にやられてあった。Jordan algebra のときは、普通の定義だと $(\mathsf{xy}+\mathsf{yx})/2$ に近い定義では整数を扱うには明らかに不都合なのでかわりに quadratic Jordan algebra を考えねばならない。これについて私の知っている文献は Racine [22] のみである。結論は、special Jordan は associative に帰着し、exceptional は完全にははっきりしないということのようである。かなり古い文献なのでその後の発展があるのかもしれない。

参考文献

[1] A. A. Albert and N. Jacobson, On reduced exceptional simple Jordan algebras, Ann. Math. 66(1957), 400–417.

[2] H. P. Allen, Jordan algebras and exceptional subalgebras of type D_4, J. Algebra 5(1967), 250–265.

[3] Allison, Lie algebras of type D_4 over number fields, Pacific J. Math. 156 (1992), 209 - 250

[4] F. van der Blij and T. A. Springer, The arithmetics of octaves and of the group G_2, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62(1959), 406-418.

[5] R. B. Brown, Groups of type E_7, J. Reine Angew. Math. 236(1969), 79–102.

[6] J. Faraut and A. Korányi, Analysis of Symmetric Cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[7] J. C. Ferrar, Strictly regular elements in Freudenthal triple systems, Trans. Amer. Math. Soc. 174(1972), 313–331.

[8] J. C. Ferrar, Lie algebra of type E_7 over number fields, J. Algebra 39(1976), 15-25.

[9] J. C. Ferrar, Lie algebra of type E_6 II, J. Algebra 52(1978), 201–209.

[10] J. C. Ferrar, On the classification of Freudenthal triple systems and Lie Algebras of type E_7, J. Algebra, 62(1980), 276–282.

[11] H. Hijikata, A remarks on the groups of type G_2 and F_4, J. Math. Soc. Japan 15(1963), 159–164.

[12] T. Ibukiyama, Unpublished notebook on maximal orders of the division Cayley algebra. (around 1981)

[13] N. Jacobson, Cayley numbers and simple Lie algebras of type G, Duke Math. J. 5 (1939), 775–783.

[14] N. Jacobson, *Lie Algebra, Interscience tracts in pure and applied mathematics, Number 10, Interscience publishers, a division of John Wiley and Sons, New York, London, 1962.*

[15] N. Jacobson, *Exceptional Lie algebras, Lecture Notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, Inc, New York, 1971.*

[16] N. Jacobson, *Structures and Representations of Jordan Algebras, AMS Colloq. Publ. 40 (1968).*

[17] N. Jacobson, *Collected Mathematical Papers, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1988*

[18] Knus, Merkurjev, Rost and Tignol, The Book of Involutions, Amer. Math. Soc. Chap. X

[19] 松島与三、リー環論、共立出版 1956

[20] K. McCrimmon, The Freudenthal-Springer-Tits constructions of exceptional Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 139(1969), 495–510.

[21] K. McCrimmon, Jordan algebras and their application, Bull. Amer. Math. Soc. 84(1978), 612–627.

[22] M. L. Racine, The arithmetic of quadratic Jordan algebra, Memoirs of the American Math. Soc. Number 136.

[23] I. Satake, On a certain invariant of the groups of type E_6 and E_7, J. Math. Soc. Japan 20(1968), 322–335.

[24] I. Satake, On Classification of Semisimple Algebraic Groups, The 7-th MSJ Int. Res. Inst. Class Field Theory - its centenary and prospect (Preprint. 7/11/1998).

[25] R. D. Schafer, *An introduction to non-associative algebra, Academic Press 1966, New York and London*

[26] H. Strade, The classification of the simple Lie algebras over algebraically closed fields with positive characteristic, *Jordan algebras (Proceedings of the Conference held in Oberwolfach, Germany, August 9-15, 1992), ed. by W. Kaup, K. McCrimmon, H. P. Petersson* (1994), 281–299, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[27] 杉浦光夫、山内恭彦、連続群論入門、培風館、1960

[28] M. L. Tomber, Lie algebra of type F, Proc. AMS. 4 (1953), 759–768.

Tomoyoshi Ibukiyama

Department of Mathematics
Graduate School of Science
Osaka University
Machikaneyama 1-16
Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan