Memoirs on “Easy” Zeta Functions

Tomoyoshi Ibukiyama, Osaka Univ.

The 9-th Summer School, July 19, 2001

筆者は雑誌「数学」で「やさしい」ゼータ関数のクラスなるものを提唱した（齋藤裕氏と共著）。これは概均質ベクトル空間のゼータ関数が意外にもやさしいこと、保型形式の次元公式等で大切なその特殊値が本当に計算できることなどを主張しているものである。このような着想に至った経緯を書きたい。ここで書くのは一種の個人的な回想記であって、なるべく数学の発生の場面を記録したいと考えたのである。通常の数学記事とは少し異質な面がある点ご寛恕願えると幸いである。なお、文中、数学者の敬称は略す。

1　前史

1.1　問題の発端

これは宣伝であるが、最近次の本を書いた。
ベルヌーイ数とゼータ関数、（荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信著）牧野書店、３３００円、２００１年７月新刊
この本を書き始めた一つの個人的な動機は指数和についての知見をまとめることであった。たとえば次が成り立つ。

Conjecture 1.1 (Lee-Weintraub Conjecture 1982:)
(Proved by Ibukiyama and Saito, 1991)
p を $p \equiv 3 \bmod 4$ なる素数とし $\zeta = e^{2\pi i/p}$ とする。有限体 $\mathbb{F}_p$ の元 a に対して ζ^a を自然に定義する。ψ を $\mathrm{mod} p$ の平方剰余指標、$B_{n,\chi}$ を指標 ψ に対する n 番目の一般ベルヌーイ数とする。このとき次の式がなりたつ。

$$\sum_{(a,b,c)\in S} \frac{\psi(abc)}{(1-\zeta^a)(1-\zeta^b)(1-\zeta^c)} = -\sqrt{-p}\left(\frac{p+1}{4}B_{1,\psi} + \frac{1}{6}B_{3,\psi}\right).$$

ただし $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{F}_p^3;\ ab+bc+ca=0, abc \neq 0\}$ とおいた。

この結果の初等的な証明は今に至るも知られていない。

この指数和に関する予想は次の予想から従うことが知られていた (Arakawa)。
n 次半整数対称行列の全体を L_n^* とおく。

$$L_n^* = \{{}^tT = T = (t_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q});\ t_{ij} \in 2^{-1}\mathbb{Z}, t_{ii} \in \mathbb{Z}\}.$$

L_n^* の元の同値を $T_1 \sim T_2 \leftrightarrow\ {}^tPT_1P = T_2$ for some $P \in GL_n(\mathbb{Z})$ で定義し、
$T \in L_n^*$ について $Aut(T) = \{P \in GL_n(\mathbb{Z});\ {}^tPTP = T\}$ と定義する。

Conjecture 1.2 (Arakawa Conjecture 1989. Proved by Ibu. and Saito 1991)
指標 ψ を 2 行 2 列の半整数対称行列 T に写像として次のように拡張する。
$rank(T \bmod p) = 0$ または 2 ならば $\psi(T) = 0$ とおき、$rank(T \bmod p) = 1$ ならば、

$${}^tPTP \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bmod p$$

$(P \in GL_2(\mathbb{F}_p))$ と書けるのでここで、$\psi(T) = \psi(a)$ とおく。L_2^* の指標付きゼータ関数を

$$\zeta(s, L_2^*, \psi) = \sum_{0<T\in L_2^*/\sim} \frac{\psi(T)}{det(T)^s |Aut(T)|}$$

で定義するとき、

$$\zeta(0, L_2^*) = \frac{1}{24} B_{1,\psi}$$

である。

これは内容は一見だれにでもよくわかる予想である。しかしなぜか長い間解かれなかった。この L 関数は概均質ベクトル空間のゼータ関数の 1 変種であって、これを証明したいという思いが（というか正確に言えば多くの人が失敗した証明が実はやさしかったという事実の意外性が)、結局は私を対称行列のゼータ関数一般の理論まで導いたことになる。何故易しい問題を難しいと専門家が誤解したのかというあたりを振り返ってみよう。

1.2 Contour integral と symmetric cone のゼータをめぐる流れ

リーマンゼータ関数の関数等式にしても、その特殊値のベルヌーイ数による表示にしても、複素関数論の Contour integral の応用により、得ることができる。基本的な積分式は下記の通りである。

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s)}{n^s} &= \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx, \\
\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)(e^{2\pi is}-1)}\int_{I(\epsilon,\infty)}\frac{1}{e^t-1}t^{s-1}dt
\end{aligned}
$$

ここで $I(\epsilon,\infty)$ は実軸の $+\infty$ から原点のまわりを反時計方向にひとまわりして、また $+\infty$ に去っていく path である。最後の式は s が何であっても意味のある積分になっているので、$\zeta(s)$ はここで既に解析接続されている。そればかりではなく s に正でない整数値を代入すれば、contour の往きと帰りのべきの分岐の差がなくなるので、通常の留数定理で値が計算できる。

この発想は 1970 年代半ばに新谷卓郎により, 総実代数体のゼータ関数の特殊値の計算に拡張された (Hecke 予想の解決)。これは代数体の単数群を cone 内の lattice と見て、上手に分解して特殊値を counter integral の和で書くことによっている。佐武一郎はこの手法をまねて、一般の Symmetric cone (= non-degenerate self-dual homogeneous cone $\subset$ formally real Jordan algebra) 内の lattice に関するゼータ関数の一般論を述べた。ここで境界上の lattice の生成元がないなどの非常に強い解析的な仮定の下で特殊値の計算法を述べた。何故これを解析的な仮定と言うかといえば、Symmetric cone の rank 個の contour integral の多重積分を行うときに、どの contour のどの path 上にも特異点が現れて欲しくないという条件だからである。この方法は２つの問題点があった。一つには、cone 内の lattice point 全部を表すのに、cone を分割してそれぞれに含まれる lattice の半群の生成元を記述しなくてはならず、これらごとに coutour integral が現れる。しかしこのような特殊値の分解の仕方は ad hoc であって、それぞれの意味はよくわからず、この計算法では特殊値の有理性その他は不明であった。さらにそれにもまして２つ目に問題なのは、そもそも仮定の条件が強すぎて、実用上はこの仮定は満たされない方が普通という点であった。栗原章は Satake に近い手法で、独立に、ゼロをあらわさない不定符号４元２次形式（符号 (1,3)) のジーゲル式ゼータ関数を扱った。（このようなものに限ったのは Satake と同様な仮定を用いようとしたのだが、５元以上ではこの仮定は常に正しくなかったからである。）具体的な一つの２次形式 $x_1^2-7x_2^2-7x_3^2-7x_4^2$ のゼータ関数の場合に $s=0$ での値の有理性を証明したが、Baker の超越数論などを援用した複雑きわまりない証明であった。ここでは anisotropic という強い「解析的」条件の制約と、なぜ特殊値が有理数なのかという理由の不透明さが残った。このような流れを受けて、荒川恒男は前期の予想に述べたゼータ関数の特殊値の計算を試みる。このゼータ関数は佐武の述べた仮定を満たしておらず、cone の境界上の激しい特異性により、２重の contour integral における計算がそのまま

では不能であった。ここを切り抜けるのに形式的な美しさを犠牲にして、いわば純粋に解析的な「切った貼った」の直接計算を実行し、L 関数の $s=0$ での値の極めて複雑な表示式を得た。これはある意味で公式には違いない。しかし数値例からこの公式が first generalized Bernoulli 数と一致するという簡明な予想を得たにも関わらず、これを直接証明する事はついに出来ていないのである。なお、関連するこの近辺の仕事として、佐武一郎、尾形庄悦は symmetric cone の特殊値と複素幾何学的不変量の関係の予想などを行ったのであるが、これは以下述べる事とは若干異なる方向であった。

1.3 概均質ベクトル空間と保型形式の次元公式の流れ

ベクトル空間 $V=Sym_n(\mathbb{C})$ への $G=GL_n(\mathbb{C})$ の自然な作用で決まる概均質ベクトル空間の、次のゼータ関数を取り扱う。

$$\zeta(s,L_n^*,+)=\sum_{T\in L_n^*/\sim,\ T>0}\frac{1}{\det(T)^s|Aut(T)|}$$

C. L. Siegel はこのゼータ関数が $Re(s)>(n+1)/2$ で収束することを示した。$n=2$ のときは、符号 (2,1) の 3 元 2 次形式とも見なせるので、不定値 2 次形式のゼータ関数に関する Siegel の一般論により解析接続と関数等式もわかっていた。これは非常に古い結果である。さて、森田康夫は 2 次のジーゲル保型形式の次元公式を torsion free な合同部分群について計算した。手法は Selberg 跡公式である。ここで中心的べき単元の寄与を計算するために概均質ベクトル空間の 2 変数ゼータ関数の留数の留数を計算した。これは Siegel の ternary zero form の zeta と実質的に同じものであり、よって留数計算も実質上、Siegel の結果と同一ではある。しかし概均質ベクトル空間が保型形式論に登場する初めての結果であり、また ternay zero といわずに概均質と言ったところに未来への予感があった。実際、新谷卓郎は一般次数での対称行列のなす概均質ベクトル空間のゼータ関数の解析接続、関数等式を（一般論にはおさまらない複雑な議論で）証明し、さらには Siegel 保型形式の次元公式における Selberg 跡公式への中心的べき単元の寄与が $\zeta(r-n,L_r^*,+)$ で与えられることを証明した。ここで n は次数、r は $rank(1_n-unipotent)$, i.e. $(n-r)(n-r-1)/2$ dimensional cusps と対応している。**ただしここにおいて特殊値 $\zeta(r-n,L_r^*,+)$ の計算法は全く知られていなかった。**よってこれを知りたいというのが多くの人の願いであった。

例として特殊値の知られていた $n=2$ をよく見ると

- ゼータの具体形：$\zeta(s, L_2^*, +)$ はほぼ

$$\sum_d \frac{h(-d)}{w(-d)} d^{-s}$$

に等しい。ここで $-d$ は２次形式の判別式。$h(-d)$ は類数、$w(-d)$ は２次形式の単数群（自己同型群）の位数である。（２次形式のかわりに２次体の（極大でない一般の）整数環といってもよい。）いずれにせよ常識的に考えて類数などという量は複雑な量である。さらには、Siegel の結果（新谷も再発見しているが）によると

- 一見著しく非対称な次の関数等式を持つ

$$\begin{aligned}\xi_-(\frac{3}{2}-s) &= 2^{2s-1}\pi^{1/2-2s}\Gamma(s-\frac{1}{2})\Gamma(s)(\cos\pi s)\xi_-^*(s) \\ &\quad -2^{-1}\pi^{1/2-2s}\Gamma(s-1/2)\Gamma(s)\zeta(2s-1).\end{aligned}$$

これより $\xi_-(0)$ は $s=3/2$ の residue formula（これは本質的には Eisenstein 級数の保型性からでる）より、$\zeta(-1)$ で書ける。 この値はリーマンゼータであるからもちろんよく知られている。さらには $s=1-m$ ($m\in\mathbb{Z}$, $m>0$) の値もすべてリーマンゼータの特殊値よりわかる。これらは $n=2$ の特殊性である。しかし、一般の n では関数等式は極めてすっきりしていて、「留数の決定 = 特殊値の決定」となっているが、留数を計算する方法がない。すなわち関数等式からは難しい量同士が等しいだけで情報が得られず、さらには contour integral で計算するのは原理的に言えば不可能ではないはずだが複雑怪奇である。($n=2$ の結果を述べた荒川の論文は印刷で５０頁！）たとえば、$n=3$ で contour integral を具体的に実行する勇気がある人はいるだろうかというのが当時のちまたの意見であった。

1991 年夏ごろの状態

$Sp(2,\mathbb{F}_p)$ の作用の流れ
Lee-Weintraub
（指数和と Lefschetz),
Hashimoto
（跡公式）
Arakawa

次元公式の流れ
Morita, Christian
Shintani
（次元公式は日本のお家芸である！関係者は清水、土方、齋藤、山内、吉田、荒川、橋本、加藤（末)、古関、伊吹山、山崎、対馬、浅井（照）、北岡, 谷川など）

contour の流れ
B. Riemann
Shintani
(総実代数体)
I. Satake
(Symmetric cone)
A. Kurihara
(anisotropic quadratic forms)
T. Arakawa

↘ ↓ ↙

指数和の初等的な証明も上手な積分計算も全て失敗。
このまま停滞か？

当時の speculation:

当時はこのような状態を解決する何の目算も無かったのであるが、私は Arakawa のかなり複雑かつ面倒な論文を詳しく読んで、もっと特異点を避けられる夢の contour integral、つまり空間内を絨毯のように遠くからやってきて球をつつみこんでまた去っていく多次元版「積分路」で特異点を全部避けるというのはどうかと思って関数論の専門家にいろいろ質問したのであるがどうもこのようなものは無いようである。また、指数和だけでもと思って初等的証明をずいぶん考えた。たまたま日本に来た Zagier にも話したが、彼も本気で考えていたようである。このころの考察には、いくつか副産物もあったのだが、結局本来の予想についてはまったく何もわからなかった。しかし、夢としては概均質のゼータは超一般化ベルヌーイ数で書けると言う定理と超一般化ベルヌーイ数は普通のベルヌーイ数で書けるという定理を証明するというものであった。結局どちらも実現しなかった。そうこうしている内に私は 1991 年に九州大学から大阪大学に転職することになった。

2　新しい展開

2.1　小さなエピソード、1991 年秋

当時、Pia Bauer Wigner が九州大学助手として赴任した。前からの縁で彼女のトークを聞いたのだが、次の形のゼータ関数

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^s} \qquad (4ac-b^2>0)$$

を具体的に計算するという結果であった。実はこの結果は Zagier, 金子昌信等により既知であったし、彼女の論法には間違いさえあった。しかし彼女の講演でちょっとはっと思ったことがあった。つまり２次形式は２次体の整数論であるという誰でも知っている当然の事実を思い出すきっかけになったのである。そういえばこういう考えで予想の L 関数を考えたことがなかったなと思って、２次体の言葉に翻訳をはじめ、その過程で理論を間違えると行けないと思って具体的な p について $\zeta(s,L_2^*,\psi)$ の Dirichlet 級数の係数を数値計算してみた。ところがちょっと愕然としたことには大量の係数がゼロだったのである。（まさかと思ったが実はだれも Dirichlet 級数だと思ってまじめに項を計算して見ていなかったのである！）特殊値が易しいどころではなくて、Dirichlet 級数自身がまったくやさしいもの（ほとんどリーマンゼータ）だったのである。こういうものだと思ってしまえば、証明は実に簡単であった。

2.2　易しいと思ってしまえばやさしかった

（１）次は齋藤裕氏と私が独立に得た。（私が喜び勇んで出来たと話したら彼も知っていたのである。）

Theorem 2.1 (Ibukiyama and Saito, 1991)

$$\zeta(s,L_2^*,\psi) = -\frac{2^{2s-1}B_{1,\psi}}{p^{-s}}\zeta(2s-1).$$

よって、特に $\zeta(0,L_2^*,\psi)=B_{1,\psi}/24.$

（２）数学者仲間の最初の反応は「まさかそれは嘘でしょう」というものであった。それくらい難しいという偏見が定着していたのである。この偏見は「特殊値」はきれいかもしれないが、「ゼータ関数」は複雑怪奇という誤解から来ていたように思う。しかし、自分が失敗していたことが、こんなにも簡

単であったという衝撃から、世の中は易しいのかもしれないと考え始めた。よく考えて見ると、一般の n でも $\zeta(s, L_n^*, +)$ の係数は 2 次形式の Mass の集まりにすぎないではないか。

$$Mass := \sum_{T \in \text{a genus}} \frac{1}{|Aut(T)|}$$

まさにこれが係数なのである。一般の n での Mass の公式の決定版の文献は実はこの時点ではなかったが、私は 1991 年の暮れから 1992 年の正月にかけて $n = 3$ を Knoeller の極めて具体的な Mass formula を用いて強引に計算した。相当に複雑細密な計算であったが、結果は心理的に言えば一種の「カタルシス」であった。

Theorem 2.2 (1992.1.15)

$$\zeta(s, L_3^*, +) = \frac{2^{2s}}{24}(\zeta(s-1)\zeta(2s-1) - \zeta(2)\zeta(2s-2)).$$

特に特殊値はベルヌーイ数でかける。

やはりゼータは信じられないくらい易しかったのである。このころ、いきがかりから齋藤裕さんに共同研究を提案した。

Theorem 2.3 (1992.2, Ibukiyama and Saito) 任意の n について、n が *odd* ならば $\zeta(s, L_n^*, +)$ はリーマンゼータでかける。n *even* なら、リーマンゼータと半整数ウェイト $(n+1)/2$ の *Cohen* 型アイゼンシュタイン級数のメリン変換で書ける。また特殊値はベルヌーイ数で書ける。

Corollary 2.4 n 次ジーゲル保型形式の次元への中心的べき単元の寄与が具体的に書ける。特に *torsion free* な合同部分群なら、標準的な予想によれば、これだけで本当の次元になっているはずだから、完全に具体的な次元公式の予想がかける。(*cf.* *[***?***] II* など)

これらの証明には概均質ベクトル空間の一般論はどこにも使っていないばかりでなく、一般論では得られない、より単純な関数等式が、直接証明で示されるなど、概均質ベクトル空間論がより算術的に新しい感じになったとの感想を持った。もう一つ、大きく強調しておきたいことがある。今でこそ多くの人が当たり前のような顔をして言っていることであるが、当時まで
「次数が偶数と奇数ではジーゲル保型形式の様子はかなり違う」

とはっきり意識していた人はいなかったのであって、これは新しい観察だったのである。

ちなみに上の定理でなぜ Cohen Eisenstein series が出てくると思いついたかとの質問を何度か受けたことがある。現象的に言えば、ゼータの係数を具体的に計算しきった後に、それがいったい何であるかという解釈が必要になる。この計算の後によく見れば実は Cohen Eisenstein の Mellin 変換になっているということを発見したという言い方も出来る。しかしこれは実は史実ではない。当時、Shintani zeta についての Sturm の論文を読んでいる内に, Zagier, Cohen という順序で論文を発見していった。weight 3/2 の Cohen Eisenstein series が $n = 2$ と（いかにもゆがんだ形で）関係しているのを発見して、ゼータ関数を具体的に計算する前から、他の weight のケースが関係しないはずはないとの予感を持っていた。その定数項と 2 次形式の密度公式にあらわれる Dirichlet L の特殊値の類似などから感じた予感である。これから言えばある意味で予定通りであった。もちろんこれは本質的な説明ではない。本質的な理由は今でもよくわからないのである。

（３）余勢をかって、易しいものはもっとあるのだと思うことにした。たとえば当時わたしの大学院生だった大野泰生君に、みんな binary cubic のゼータは難しい難しいと言っているけれど、Dirichlet 級数としての係数を一つだってまともに計算した人はいないに違いない。本当はみんなどんな Dirichlet 級数かきっと知らないのだ。これを計算機で計算して何かとんでもないことを見つけなさいとけしかけた。実際にかれは American Journal のレフェリー氏を愕然とさせることを見つけたのである。しかしこのゼータが「やさしい」ゼータかどうかはまだ本当にはわかっていない。(ちなみに計算した人が全くいないというのは、私の誤解であった。一部は昔々 Eisenstein が計算していた！)

それ自身は概均質ベクトル空間のゼータ関数では無いが、形が似ていることから、いわゆる Koecher-Maass 級数も易しいのではないかと考え始めた（桂田英典氏との共同研究）。Koecher-Maass 級数と普通のゼータの違いは次の図式で説明できる。

$\boxed{\text{保型形式の Hecke L 関数}}$ ↗ $\boxed{\text{Hecke 作用素の固有値で定義}}$ (Spinor zeta 等 Euler 積あり)

↘ $\boxed{\text{Mellin 変換で定義}}$ (Koecher-Maass 級数、Euler 積なし)

前者の Hecke 作用素による定義の方が普通であって、Langlands 流などは皆これを用いている。これは最初から Euler 積を持っているので素直に算術的

代数幾何学などとの関係が予感されるが、一方で解析的な性質はわかりにくい。たとえば解析接続や関数等式を証明するのは一般に非常に難しい。一方 Koecher-Maass 級数は関数等式を示すのは非常に簡単である。しかし Euler 積を持たないのでゲテモノと思われていた節がある。

具体的には、Koecher-Maass 級数はジーゲル保型形式

$$F(Z) = \sum_T a(T) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(TZ)}$$

に対して

$$\xi(s, F) = \sum_{T \in L_n^{*,+}} \frac{a(T)}{\det(T)^s |Aut(T)|}$$

で定義する。これを Siegel Eisenstein 級数などについて計算してみた。たとえば

Theorem 2.5 (Ibukiyama and Katsurada) F がジーゲルアイゼンシュタイン級数なら、$\xi(s, F)$ はリーマンゼータと *Cohen* 型アイゼンシュタイン級数のメリン変換の *convolution product* でかける。

当時、アイゼンシュタイン級数のフーリエ級数の公式というのは $n > 3$ ではなかったのである。今では桂田氏の公式があるが、今でもこれは極めて複雑な量であって、公式を用いて計算するのはきっと難しい。上の Koecher-Maass 級数についても、私は当初 $n = 3$ で全部無手勝流で計算しきってみた。結果はリーマンゼータだけが現れた。当時、この $n = 3$ での結果を説明した後でさえ、一般の n でもやさしくなるということには大変懐疑的な専門家も多かった。ある意味で個別の複雑さを知りすぎていたために、このような一種の平均的な量が易しいと言うことがあまり信じられなかったものと思う。しかし、私の経験した数学の世の中はつねに普通考えるよりもはるかに単純明快であった。

（４）symmetric cone のゼータはだいたいみなわかっている。齋藤裕氏の寄与が大きい。彼は最近はもっと複雑なものも計算されている。この文章はもっぱら私の側の思い入れを書いているので彼の論文の解説はしないが、これからこの分野を試みるつもりの人は斎藤さんの論文をたくさん読むべきである。この方面の私の結果は、たとえば有理整数環上の符号が $(1, n)$ の任意の不定符号２次形式のゼータ関数は「やさしい」ゼータであり、また特殊値は計算可能な有理数であることを示した。（もちろんこれは栗原章の結果を含むし、また値も具体的にわかるという点ではより進化している。）

問: 概均質ベクトル空間のゼータはすべて「やさしい」ゼータか？

ちなみに [?] 日本数学会論説「やさしい」ゼータ関数について （伊吹山・齋藤著）はその大部分を用いて「やさしい」とはどういう意味かが説明してある。この論説の内容はここではなるべく繰り返さないようにつとめた。お読みいただければ幸いである。なお、この論説は Don Zagier による英語への翻訳が Sugaku Exposition として 2001 年秋に AMS から出版された。

3 未来はどうなるか、遠未来のもくろみ

3.1 「やさしい」ゼータの与える新しい理論的枠組み

良いゼータはオイラー積を持つというのは誤解だ。

例として 2 次形式に関する Siegel formula をあげる。2 次形式できまるテータ関数の一つの種の中での平均値が Eisenstein 級数である。この Eisenstein 級数はある意味で標準的なものと言うべきだが、Hecke 作用素の固有関数ではない。概均質ベクトル空間のゼータも Koecher-Maass 級数もオイラー積をもたない。

Koecher-Maass 級数の一般論と逆定理：

任意の tube domain で Koecher-Maass 級数の解析接続と関数等式が証明されている。(cf. [?]). また少なくとも一般次数のジーゲル保型形式については逆定理が知られている。逆定理というのはこの場合、量指標つきの Koecher-Maass 級数が十分多くの量指標について関数等式をみたせば、もとのディリクレ級数は保型形式から来るというものだ。逆定理の成立の根拠は Mellin 変換と逆 Mellin 変換の対応という 1 変数どうしの対応にすぎないものを、あまったパラメータ部分を一般量指標（Maass の命名によるが、実際はある種の実領域の保型形式のこと) でスペクトル分解することにより情報を補充して使用するという点にある。$n = 2$ は今井香（現太田香）、n 一般は Weissauer である。

Duke-Imamoglu's proof of Saito-Kurokawa conjecture:

今井香（現太田香）氏の逆定理を用いて、Saito-Kurokawa lifting を証明した論文である。詳細な内容は第 5 回整数論サマースクールでの私の解説 [?] 参照（ほとんどアナウンスにすぎない原論文より遙かに詳しい解説である。）ここでもポイントは次の通り。量指標付きの Koecher-Maass 級数というのは保型形式のフーリエ級数からくるものと量指標の値（＝保型形式の値）の convolution product になっている。ここ

で保型形式の値というのを、虚の代数体で考えた値の平均値と思えば、実で考えると保型形式の積分値、すなわち周期と言うことになって、Waldspurger 型の定理によれば、周期（または L 関数の値と言っても同じ）はすなわち Shimura 対応で対応する保型形式のフーリエ係数である。今の場合は Waldspurger に相当するものとして、Katok-Sarnak の結果がある。これにより Koecher-Maass 級数が結局 2 つの保型形式の（フーリエ係数を用いた）convolution product と見なすことが出来、Rankin-Selberg method で関数等式がうまく求められた。

Koecher-Maass 級数には予想を生み出す力がある：

さて、上のように考えると一般論はどうなるだろうか？最近の Ikeda lifting の経緯を若干述べる。桂田氏と Eisenstein 級数の Koecher-Maass 級数を計算したとき、その結論の形が 1 変数の Eisenstein 級数のゼータを含んでいた。このためこの部分を 1 変数のカスプ形式 (weight $2k-n$) に変えた Koecher-Maass 級数を与える weight k の n 次ジーゲル保型形式があるはずだ（ただし n は偶数）という一種の lifting 予想を 1996 年頃、何人かの数学者に述べたのだがあまり関心を引かなかった。そもそも Koecher-Maass 級数という定式化を魅力的に感じる人がいなかったからでもある。

ところで、1998 年の Oberwolfach conference において、Breulmann-Kuss は、同様の予想（ただしゼータの対応は standard zeta の対応として定式化と言う点で私の予想とは異なっている）を Duke-Imamoglu 予想として述べ、実験的な証拠を発表した。Duke-Imamoglu 予想と呼んだのは、彼らがある研究集会で、やや非公式な形で予想を述べたからと聞いている。これについて池田保はフーリエ係数を具体的に書ききることにより証明を与えた。この結果、Koecher-Maass 級数も計算可能になり（これは主に桂田氏の研究の成果だが共著のプレプリントにしていただいている。）当初の私の感想は正しかったと言うことになった。

概均質のゼータはなぜやさしいか？周期と志村対応：

ここで、すべての lifting は（跡公式のことはしばし忘れて）Koecher-Maass 級数により証明されるべきだと考えたとする。これはある意味で Langlands 流の保型形式論の裏番組である。少なくともこのような考え方は主流ではないし、正当性がどの程度あるかわからないので、単なる私の趣味だと思っていただきたい。さて、このような証明のためには周期イコール何かのフーリエ係数という等式が必要になる。何のフーリエ係数かと言えば今のところわかってないのだから答えようは

ないが、志村対応風だと信じれば、GL_n は $\widetilde{GL_n}$ (double cover) かなということになる。さて、対称行列の概均質ベクトル空間のゼータ関数 $\zeta(s, L_n^*, +)$ は何故やさしいのだろうか？ないしはそもそもこのゼータはどの程度保型的なのだろうか？このような疑問に解答を与えるためにも、GL_n の志村対応ないしは Shintani-Waldspurger の定理を考えるのが重要なのではないかと考える。$\zeta(s, L_n^*, +)$ は、定数 1 をとる GL_n の保型形式のゼータとも思えるからである。これだけ単独で考えていたのでは、見えないものが、定数 1 を量指標（$= GL_n$ の保型形式）まで考えることにより見えるはずだと思うのである。将来、$\widetilde{GL_n}$ の何らかの意味でのアイゼンシュタイン級数の保型性によって、$\zeta(s, L_n^*, +)$ の単純性が理解されるかもしれないと考えるのである。そして、このような志村対応が一般的に証明されるならば、Saito-Kurokawa lifting のときのようなフーリエ係数から見た算術的な香りのする lifting は、すべからく Koecher-Maass 級数の逆定理により証明されるようになるはずだと私は信ずるのである。

3.2 次元公式を完全に書ききること。特に寄与の消滅予想の部分を解決すること

話のついでにもう一つ大風呂敷を広げ、上のような夢をあげる。今までは少なくとも次がわかっている。

Theorem 3.1 (cf. [?]) *tube domain* 上の正則保型形式の次元への中心的べき単元への寄与はそのべき単元に対応する *Jordan algebra* の *cone* のゼータ、すなわちある種の概均質ベクトル空間のゼータの特殊値でかける。

これを用いて、特に跡公式におけるべき単元以外の寄与の消滅という fork-lore conjecture を証明すれば Tube domain の保型形式の次元公式が（torsion free discrete group については) 本当に具体的にわかることになる。これは実質的でわかりやすい数学であると思う。日本の伝統芸でもあり、何とか完成させられるとうれしいのであるが。私は現在この方向ではまだ何もしていないのであるが、少なくとも単なる「夢のような話」から実現可能かもしれない「夢」には進化していると考えるのである。

以下で文献は自分の分（それも中途半端に）しかまとめられなかったがご容赦願いたい。

References

[1] Tomoyoshi Ibukiyama and Saito Hiroshi. On L-functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee and Weintraub, J. Number Theory 48(1994), no.2, 252-257.

[2] Tomoyoshi Ibukiyama and Saito Hiroshi, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions. Amer. J. Math. 117(1995), no.5, 1097–1155. II: preprint, III. Nagoya Math. J. 146(1997), 149-183.

[3] Tomoyoshi Ibukiyama and Saito Hiroshi 「やさしい」ゼータ関数について　日本数学会「数学」　５０巻１号 (1998), 1-11. (Sugaku Exposition, translated by Don Zagier, to appear.)

[4] 伊吹山知義：A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoḡlu, 第５回整数論サマースクール報告集、1997, 134–176

[5] 伊吹山知義: Koecher Maass series on Tube domains, 第１回整数論オータムワークショップ報告集、1999, 1–46

[6] 伊吹山知義: Dimension of holomorphic automorphic forms of tube domains; the contribution of central unipotent elements and zeta functions of prehomogeneous vector spaces, 第３回整数論オータムワークショップ「保型形式の次元公式」(2001), 66 – 92.

Tomoyoshi Ibukiyama
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Machikaneyama 1-16, Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan,
email:ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp