2011年度（平成23年度）大学院入試

数学問題A

実施日時

2010年（平成22年）8月30日（月）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] 高々 2 次の実係数多項式の全体

$$V = \left\{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ ; \ a_0,\, a_1,\, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

を実数体 $\mathbb{R}$ 上の線形空間とみなす. V から V への線形写像 F を

$$F(p(x)) = (x+1)\frac{d}{dx}\,p(x)$$

で定める.

(1) V の基底を適当に一つ取って, その基底に関する F の表現行列を求めよ.

(2) V から V への線形写像全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を L とする. L の線形部分空間 M を

$$M = \{G \in L \ ; \ G \circ F = F \circ G\}$$

で定める. このとき, M の次元を求めよ.

[2] $I = [0, \infty)$ とおく．有界関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ よりなる関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 $f : I \to \mathbb{R}$ に I 上一様収束するとする．

(1) f は I で有界であることを示せ．

(2) 各自然数 n に対して $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ が成り立つならば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．

(3) (2) と同じ条件下で，$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ とおくとき，$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ であることを示せ．

[3] X, Y を位相空間とする. X から Y への写像 $f : X \to Y$ に対し, 積集合 $X \times Y$ の部分集合 $G = \{(x, f(x))\ ;\ x \in X\}$ を f のグラフという.

(1) f が連続写像で Y がハウスドルフ空間ならば, f のグラフ G は $X \times Y$ の積位相に関して閉集合であることを示せ.

(2) X, Y がともに実数直線 $\mathbb{R}$ のとき, 連続でない写像 $f : X \to Y$ で, そのグラフ G が $X \times Y = \mathbb{R}^2$ の閉集合となるものの例をあげよ.

[4] 複素関数 $f(z)$ を $f(z) = \dfrac{1 - e^{iz}}{z^2} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 0)$ で定義する. ただし i は虚数単位である.

(1) $r > 0$ に対し, 曲線 C_r を $z = re^{it}$ $(0 \leq t \leq \pi)$ で定める. このとき, $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)dz$ と $\displaystyle\lim_{r\to+0} \int_{C_r} f(z)dz$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ の値を求めよ.