

2011 年度（平成 23 年度）大学院入試

数学問題 B

実施日時

2010 年（平成 22 年）8 月 30 日（月）

13:30 ~ 16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 問題冊子は表紙も入れて 4 枚、問題は全部で 3 問である。
- 3 問の中から ちょうど 2 問 を選択解答すること。下の欄に、受験番号、氏名を記入し、選択解答した問題の番号を で囲め。

受験番号	氏名		
選択問題番号	1	2	3

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い、それぞれの答案用紙に 受験番号、氏名、問題番号 を記入すること。
- 問題冊子の表紙、答案用紙、下書き用紙は終了後すべて提出し、持ち帰ってはならない。

- [1] (1) 群 G の部分群 H について, 次の 2 つの主張 (a), (b) は同値であることを証明せよ.
- (a) G の左 H 剰余類の個数は有限である.
 - (b) G の右 H 剰余類の個数は有限である.
- また, このとき, (a), (b) における個数は等しいことも示せ.
- (2) 群 G の部分群 H について, (1) の (a), (b) が成立すると仮定する. さらに K を G の部分群とする. このとき K の左 $K \cap H$ 剰余類の個数は有限であることを示せ.

[2] \mathbb{R}^3 を 3次元ユークリッド空間とし, $W = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ とおく. W 上の同値関係 \sim を, $x, y \in W$ に対し次のように定義する:

$$x \sim y \iff x = ty \text{ となる実数 } t \neq 0 \text{ が存在する.}$$

この同値関係による W の商位相空間を Q で表す. また $x = (x_1, x_2, x_3) \in W$ を含む同値類を $[x] = [x_1, x_2, x_3] \in Q$ で表す. L を平面 \mathbb{R}^2 上の直線全体の集合とする. 直線 $l \in L$ が方程式

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

で表されるとき, l を Q の点 $[a, b, c]$ と同一視することにより, L を Q の開集合 $Q - \{[0, 0, 1]\}$ とみなす.

- (1) L の部分集合 $M = \{l \in L; (0, 0) \in l\}$ は, 円周 S^1 と同相であることを示せ.
- (2) (i) 被覆写像 $p: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow L$ を構成せよ.
(ii) 包含写像 $\iota: M \hookrightarrow L$ から誘導される基本群の間の準同型 $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(L)$ は同型であることを証明せよ.
- (3) L 内の直線 $l_0: x + y + 1 = 0$ を固定する. L の開集合

$$V = \{l \in L; l \text{ と } l_0 \text{ は一点で交わる}\}$$

を考え, $f: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ を, $l \in V$ に対し l と l_0 の交点を対応させる写像とする. V を Q の開部分多様体とみるとき, f は可微分写像であることを示せ. ただし, Q は可微分多様体としての実射影平面とみなす.

[3] φ を \mathbb{R} 上の実数値連続関数とし, f を \mathbb{R} 上の実数値ルベーク積分可能関数とする. \mathbb{R} 上の実数値関数 g を次のルベーク積分

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(t\varphi(x)) dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

で定める.

- (1) g は \mathbb{R} で連続であることを示せ.
- (2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対し, 必要ならば場合分けを行い,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(t\varphi(x)) dt$$

を求めよ.

- (3) $A = \{x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) = 0\}$ とおくとき, 次の等式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = \int_A f(x) dx$$

を示せ.