数学専攻入学試験

(2010 年 11 月 20 日 10:00 – 12:00)

問題は全部で 4 問ある．解答には，問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

問 1. 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ の収束・発散をパラメータ $\alpha > 0$ の値によって分類せよ．(収束する場合の積分値は求めなくてよい．)

問 2. K を体とする．α，β を K の相異なる元，A を K の元を成分に持つ n 次正方行列とする．そして

$$\begin{aligned} V &= \{ (A - \alpha E_n)x \mid x \in K^n \} \\ W &= \{ x \in K^n \mid (A - \beta E_n)x = 0 \} \end{aligned}$$

とする．ただし，E_n は n 次単位行列である．以下の問に答えよ．

(1) $W \subseteq V$ を示せ.

(2) 等式

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E_n) + \mathrm{rank}(A - \beta E_n) = n$$

が成り立つとき,

(i) $V = W$ を示せ.

(ii) K の元を成分に持つある正則な n 次正方行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha E_r & 0 \\ \hline 0 & \beta E_s \end{array}\right)$$

となることを示せ．ただし，$r = \mathrm{rank}(A - \beta E_n)$，$s = \mathrm{rank}(A - \alpha E_n)$ である.

問 3. $GL(2,\mathbb{R})$ を正則な実 2 次正方行列の全体のなす集合とする．各元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ を $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ と同一視することによって，$GL(2,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^4$ の部分集合と考え，$\mathbb{R}^4$ の相対位相を入れる．以下の問に答えよ．

(1) $GL(2,\mathbb{R})$ は連結でないことを示せ．

(2) $GL(2,\mathbb{R})$ に同値関係

$$A \sim B \iff \text{ある } P \in GL(2,\mathbb{R}) \text{ が存在して } A = P^{-1}BP$$

を考える．

(i) $a \neq 0$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ．

(ii) 商位相空間 $GL(2,\mathbb{R})/\sim$ はハウスドルフ空間でないことを示せ．

問 4. C を複素平面上の C^1 級単純閉曲線とする．C には正の向きを付ける．もし関数 f が C 上およびその内部で正則ならば，C の内部にある各点 a に対してコーシーの積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{dz}$$

が成り立つ．このことをコーシーの積分定理を用いて証明せよ．