2012 年度（平成 24 年度）大学院入試

数学問題 A

実施日時

2011 年（平成 23 年）8 月 29 日（月）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である．
- 問題は全部で４問である．
- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い，それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

［1］ 以下の各問に答えよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) s と t を正の実数として, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = (n+s)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定義する. 余弦関数 $\cos x$ のテイラー展開を用いて, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つような s と t の組 (s, t) をすべて求めよ.

(3) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n dt\,.$$

［2］ A を 3×2 の複素行列, B を 2×3 の複素行列として, 積 AB が

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

であるとする.

(1) AB の固有値 α をすべて求めよ. また各固有値 α に対応する固有空間 V_α の基底を一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} \in V_\alpha$ に対し, $\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x}$ とおく. このとき $BA\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{y}$ が成り立つことを示せ.

(3) $g_\alpha : V_\alpha \longrightarrow \mathbf{C}^2$ を $g_\alpha(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ により定まる線形写像とする. 0 でない固有値 α に対し, g_α の像 $\mathrm{Im}\, g_\alpha$ の次元を求めよ.

(4) BA を求めよ.

［3］ 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ に通常の位相を与えて位相空間としたものを X とする．また，集合族 $\{\, [a,b) \mid a,b \in \mathbf{R},\ a < b \,\}$ を開基とするような位相を $\mathbf{R}$ に与えて位相空間としたものを Y とする．集合 $\mathbf{R}$ の恒等写像から定まる X から Y への写像を f とし，同じく集合 $\mathbf{R}$ の恒等写像から定まる Y から X への写像を g とする．

(1) $f : X \longrightarrow Y$ は連続ではないことを示せ．

(2) $g : Y \longrightarrow X$ は連続であることを示せ．

(3) $\mathbf{R}$ の部分集合 A^+ と A^- を

$$A^+ = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, 3, \cdots \right\} \cup \{0\}, \qquad A^- = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, 3, \cdots \right\} \cup \{0\}$$

と定義する．これらが X においてコンパクトであるかないかを，それぞれについて理由をつけて答えよ．

(4) A^+ と A^- が Y においてコンパクトであるかないかを，それぞれについて理由をつけて答えよ．

［4］ 複素平面上の有理関数

$$f(z) = \frac{1}{z^5 + 1}$$

を考える.

(1) $f(z)$ の $z = e^{i\pi/5}$ における留数を求めよ. ただし i は虚数単位とする.

(2) 実数 $R > 1$ に対し,

$$\Gamma_R = \left\{ Re^{i\theta} \;\middle|\; 0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{5} \right\}$$

とおく. このとき

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5 + 1} dx = \frac{\pi}{5\sin(\pi/5)}\,.$$