2012年度（平成24年度）大学院入試

数学問題 B

実施日時

2011年（平成23年）8月29日（月）

13:30～16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて４枚, 問題は全部で３問である.
- ３問の中から ちょうど２問 を選択解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択解答した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	2	3

- 解答には問題ごとに別々の答案用紙を用い, それぞれ の答案用紙に 受験番号, 氏名, 問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙, 答案用紙, 下書き用紙は終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

[1] n 次元列ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n\,, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

で定義する. $\mathbf{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を一組とり, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ から生成される $\mathbf{Z}$ 加群を L とする. また, $\mathbf{Z}$ 加群 M を

$$M = \{\ \boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^n \mid \text{任意の } \boldsymbol{v} \in L \text{ に対し } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{Z} \text{ が成立 }\}$$

で定義する.

(1) $\mathbf{R}^n$ のベクトルの組 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ で, すべての $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ に対し

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たすものが唯一組存在することを示せ.

(2) M は $\mathbf{Z}$ 加群として $\mathbf{Z}^n$ に同型であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を並べてできる n 次正方行列 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を T と表し, T の転置行列を ${}^tT$ とする. このとき, $L \subset M$ が成り立つためには, 行列 ${}^tT \cdot T$ のすべての成分が整数になることが必要十分であることを示せ.

(4) $L \subset M$ ならば, 剰余加群 M/L は位数が $(\det T)^2$ の有限群であることを示せ.

[2] $V = M_2(\mathbf{R})$ を 2 次実正方行列全体のなす実線形空間とし, V の内積を

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)\,, \qquad A, B \in V$$

で定義する. ただし, ${}^tA$ は A の転置行列を表し, Tr は

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

で定める. $V \times V$ の元 (A, B) で, $\langle A, A\rangle = 1$ かつ $\langle A, B\rangle = 0$ を満たすものすべてからなる集合を X とする.

(1) X は $V \times V$ の部分多様体であることを示せ.

(2) O を 2 次正方零行列として, 写像 $\pi : X \longrightarrow X$ を $\pi((A, B)) = (A, O)$ により定義する. また $\iota : X \longrightarrow X$ を X の恒等写像とする. このとき, π と ι はホモトピックになるか？ 理由をつけて答えよ.

(3) ホモロジー群 $H_m(X, \mathbf{Z})$ が零とならない整数 m に対して, $H_m(X, \mathbf{Z})$ を求めよ.

［3］測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の 2 乗可積分関数の列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ が, すべての $j, k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ に対し

$$\int_X f_j(x)\overline{f_k(x)}d\mu(x) = \begin{cases} 1 & (j = k \text{ のとき}) \\ 0 & (j \neq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たしているとする.

(1) 2 以上の整数 ℓ に対し, X 上の関数 F_ℓ を

$$F_\ell(x) = \frac{1}{\ell^2}\sum_{j=1}^{\ell^2-1} f_j(x)$$

と定義する. このとき

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} |F_\ell(x)|^2$$

が X 上で積分可能であることを示せ.

(2) 正の整数 m に対し, $\sqrt{m}$ を超えない最大の整数を $[\sqrt{m}]$ と表す. X 上の関数 G_m を

$$G_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=[\sqrt{m}]^2}^{m} f_j(x)$$

と定義する. このとき, 不等式 $m - [\sqrt{m}]^2 \leqq 2\sqrt{m} - 1$ を用いて

$$\sum_{m=1}^{\infty} |G_m(x)|^2$$

が X 上で積分可能であることを示せ.

(3) μ に関しほとんどすべての $x \in X$ に対して

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f_j(x) = 0$$

が成り立つことを示せ.