

2012 年度（平成 24 年度）大学院入試

# 数学問題

実施日時

2011 年（平成 23 年）11 月 19 日（土）

10:00～12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない。
- 問題冊子は表紙も入れて 5 枚である。
- 問題は全部で 4 問である。
- 解答は、問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること。答案用紙の裏面に記入してもよい。
- それぞれの答案用紙に 受験番号、氏名、問題番号を記入すること。
- 答案用紙、下書き用紙は終了後すべて提出し、持ち帰ってはならない。

[ 1 ] (1)  $f(x)$  を区間  $[-1, 1]$  上で定義された関数とする.  $f(x)$  が点  $x = c$  ( $-1 < c < 1$ ) で連続である, ということの定義を述べよ.

(2) 区間  $[-1, 1]$  上の連続関数の列  $\{f_n(x)\}$  が  $n \rightarrow \infty$  のとき関数  $f(x)$  に  $[-1, 1]$  上で一様収束しているとする. このとき  $f(x)$  は  $[-1, 1]$  上の連続関数であることを示せ.

(3) 小問 (2) において,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

が成立することを示せ.

(4)  $\rho(x)$  を  $\mathbb{R}$  上の連続関数で  $|x| \geq 1$  では  $\rho(x) = 0$  であるとし

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1$$

を満たしているとする.  $\phi(x)$  を  $[-1, 1]$  上の連続関数とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-1}^1 \rho(nx) \phi(x) dx = \phi(0)$$

となることを示せ.

[2]  $V, W$  を実数体  $\mathbb{R}$  上の有限次元線形空間とし  $f: V \rightarrow W$  を  $\mathbb{R}$  上の線形写像とする.  
 $f$  の核を次で定義する.

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V; f(v) = 0\}.$$

- (1)  $f$  が線形写像であることの定義を述べよ.
- (2)  $0 \in \text{Ker}(f)$  を示せ.
- (3)  $f$  が単射であることと  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  であることは同値であることを示せ.
- (4)  $g: V \rightarrow W$  も線形写像とする. このとき,  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$  は  $V$  の線形部分空間であることを示せ.

[3]  $X$  を空でない集合とする.

(1)  $d$  を直積集合  $X \times X$  から実数全体の集合  $\mathbb{R}$  への写像とする.  $d$  が  $X$  上の距離関数であることの定義を述べよ.

(2)  $d_1, d_2$  を  $X$  上の距離関数とする. 写像  $\delta_1, \delta_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定める.

$$\delta_1(x, y) = \max \{d_1(x, y), d_2(x, y)\} \quad (x, y \in X),$$

$$\delta_2(x, y) = \min \{d_1(x, y), d_2(x, y)\} \quad (x, y \in X).$$

(a)  $\delta_1$  は  $X$  上の距離関数であることを示せ.

(b)  $\delta_2$  は一般には  $X$  上の距離関数にはならない. 反例をあげることにより, このことを示せ.

[4] 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を反時計回りに一周する曲線を  $C$  とする. このとき積分

$$\int_C \frac{dz}{z}, \quad (z = x + iy)$$

を2通りに計算することによって, 次の式を示せ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

但し  $a > 0, b > 0$  とする.