2013年度（平成25年度）大学院入試

数学問題 A

実施日時

2012年（平成24年）8月29日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない．
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である．
- 問題は全部で４問である．
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい．
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること．
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない．

［1］ 閉区間 $[0,\pi]$ 上の C^2 級実数値関数 $\phi(x), \psi(x)$ は $\phi''(x)+\phi(x)=\psi''(x)+\psi(x)=0$ をみたすものとし，二変数関数 $G(x,y)$ を

$$G(x,y)=\begin{cases}\phi(x)\psi(y) & (0\le y\le x\le \pi)\\ \psi(x)\phi(y) & (0\le x\le y\le \pi)\end{cases}$$

と定義する．また閉区間 $[0,\pi]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して，$[0,\pi]$ 上の関数 $u(x)$ を積分

$$u(x)=\int_0^\pi G(x,y)f(y)dy$$

により定める．

(1) $u(x)$ は開区間 $(0,\pi)$ 上で C^2 級であることを示せ．

(2) ある定数 W があり，$u''(x)+u(x)=Wf(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\phi(x)=\sin x$ のとき，$W=1$ と $\psi'(0)=0$ をみたす $\psi(x)$ を求めよ．

［2］ V を $\mathbb{R}$ 上有限次元の線形空間とする．$f : V \to V$ を線形写像とし，n 個の f を合成した写像 $f^n = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}$ による V の像を $f^n(V)$ とする．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f^{n+1}(V)$ は $f^n(V)$ の部分空間であることを示せ．

(2) ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があり，$n \geq n_0$ ならば

$$f^n(V) = f^{n_0}(V)$$

となることを示せ．

(3) (2) の n_0 について，$W = f^{n_0}(V)$ とおく．f の W への制限 $f|_W$ は W から W への同型写像であることを示せ．

［3］ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$ の内部を $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ とし，$\mathbb{R}^2$ の通常の位相により，部分集合 R を位相空間とみなす．R 上の二点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がともに D に含まれるとき，あるいは $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となるとき，同値であるとして，同値関係 $\sim$ を定め，同値関係 $\sim$ による R の商集合を $R/\!\sim$ とし，自然な射影を $\pi : R \to R/\!\sim$ とする．ここで，R の内部の点が表す $R/\!\sim$ の元を $\mathbf{x_0}$ とする．

(1) $R/\!\sim$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を，部分集合 U が $\mathcal{O}$ に属するのは，$\pi^{-1}(U)$ が R の開集合となるときである，として定義する．このとき，$R/\!\sim$ には $\mathcal{O}$ を開集合族とする位相が定まることを示せ.
以下，この位相 $\mathcal{O}$ により $R/\!\sim$ を位相空間とする.

(2) $R/\!\sim$ はハウスドルフ空間ではないことを示せ.

(3) $f : R/\!\sim \to R/\!\sim$ を同相写像とすると，$f(\mathbf{x_0}) = \mathbf{x_0}$ となることを示せ.

［4］ $\phi(\theta)$ を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の複素数値 C^2 級関数とし，$|z|<1$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\theta)e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}d\theta$$

とする.

(1) $f(z)$ は $|z|<1$ 上で正則であることを示せ.

(2) 原点を中心とするベキ級数展開 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の各係数 c_n は，不等式

$$n^2|c_n| \leq \max_{\theta\in\mathbb{R}} |\phi''(\theta)|$$

をみたすことを示せ.

(3) ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は閉単位円板 $|z| \leq 1$ 上で収束することを示せ.

(4) x を実数として，

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

を示せ.