2013 年度（平成 25 年度）大学院入試

数学問題 B

実施日時

2012 年（平成 24 年）8 月 29 日（水）

13:30〜16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて４枚, 問題は全部で３問である.
- ３問の中から ちょうど２問 を選択解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択解答した問題の番号を○で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号			
	1	2	3

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙, 答案用紙, 下書き用紙は終了後すべて提出し, 持ち帰ってはならない.

［1］ R を単位元をもつ可換環とし，$R \neq \{0\}$ とする. 次の命題 (1), (2) を証明せよ.

(1) 任意の元 $a \in R$ に対して，単項イデアル (a) が素イデアルであるか，または R に一致するならば，R は体である.

(2) R が有限個の元からなる整域であるならば，R は体である.

［2］ ユークリッド空間の直積 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ から 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ への写像 F を

$$F(x,y) = (|x|^2 + |y|^2, |x|^2 - |y|^2)$$

により定める．ここで，$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ であり，$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2$ である．写像 F による $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ の逆像を $X_{s,t} = F^{-1}(s,t)$ とし，$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ の部分集合として，相対位相を入れて位相空間とする．

(1) 写像 F のヤコビ行列を求めよ．

(2) $s+t>0, s-t>0$ のとき，$X_{s,t}$ が 3 次元多様体となることを示せ．

(3) (2) における $X_{s,t}$ のホモロジー群 $H_p(X_{s,t})$ を求めよ $(p = 0,1,2,3)$.

［3］ C を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の C^1 級単純閉曲線，D を C で囲まれた有界領域とする．$D \cup C$ を含む開集合を U とし, U 上正則な関数の列 $\{f_n(z)\}$ が次の二つの条件 (a), (b) をみたすとする.

(a) 正の定数 M があり，任意の自然数 n と任意の $z \in C$ に対して

$$|f_n(z)| \leq M$$

となる.

(b) 関数列 $\{f_n(z)\}$ は C 上で 0 に各点収束する．すなわち，各 $z \in C$ に対し

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = 0$$

となる.

このとき，関数列 $\{f_n(z)\}$ は D の任意のコンパクト部分集合 K 上で 0 に一様収束することを示せ.