2013年度（平成25年度）大学院入試

数 学 問 題

実施日時

2012年（平成24年）11月17日（土）

10:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて５枚である.
- 問題は全部で４問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙１枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] $f(x)$ を閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする.

(1) $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能であることを示せ.

(2) 開区間 $(0,1)$ 上の関数 $u(x)$ を積分

$$u(x) = \int_0^1 |x-y| f(y)dy$$

により定める. このとき, 二階導関数 $u''(x)$ を求めよ.

[2] 複素数を成分とする $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B に対して

$$AB = I_m, \qquad BA = I_n$$

が成立するならば, $m = n$ であることを示せ. ただし, I_k は k 次単位行列である.

[3] 空集合ではない位相空間が 2 つの真閉部分集合の和集合にならないとき，条件 $(*)$ をみたす位相空間という．ここで, 真閉部分集合とは閉集合である真部分集合のことである．位相空間 X が条件 $(*)$ をみたすとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 空集合ではない 2 つの開集合 $U_1, U_2 \subset X$ に対して $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ となることを示せ.

(2) X は連結であることを示せ.

(3) 位相空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ の像 $f(X)$ に相対位相を入れて位相空間とする．このとき, 像 $f(X)$ は条件 $(*)$ をみたす位相空間であることを示せ.

[4] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いて, 以下の問いに答えよ. ただし b は実数であり i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ である.

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-(x+bi)^2}dx$$

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cos(2bx)dx$$