2016 年度（平成 28 年度）大学院入試

数 学 問 題 B

実施日時

2015 年（平成 27 年）8 月 18 日（火）

13:30～16:30

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて 7 枚, 問題は全部で 6 問である.
- 6 問の中から ちょうど 3 問 を選択解答すること. 下の欄に, 受験番号, 氏名を記入し, 選択解答した問題の番号を〇で囲め.

受験番号	氏名

選択問題番号						
	1	2	3	4	5	6

- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙 1 枚に記入すること．答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれ の答案用紙に 受験番号，氏名，問題番号 を記入すること.
- 問題冊子の表紙，答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] S_7 を 7 次対称群, すなわち, 7 個の元からなる集合 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ から Ω への全単射写像全体のなす群とする. 以下の問に答えよ.

(1) S_7 の部分集合 H を次で定める:

$$H = \{\sigma \in S_7 \,|\, \sigma(7) = 7\} \ .$$

H は S_7 の正規ではない部分群であることを示せ. また, 指数 $[S_7 : H]$ を求めよ.

(2) e を S_7 の単位元とする. 次の条件 (C) をみたすような S_7 の部分群 K の個数とそれぞれの K の位数を求めよ.

(C) K の任意の元 k に対し $k^7 = e$ が成り立つ.

(3) G を位数が 7^n(n は正の整数) である群とする. G の部分群 N の指数が 7 であるならば, N は G の正規部分群であることを示せ.

[2] $\mathbb{Q}$ を有理数体, $A = \mathbb{Q}[x, y]$ を $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数多項式環とする. 以下, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ で生成される A のイデアルを $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ と表すことにする. 次の条件 (i), (ii) をともにみたす A のイデアルを M とする.

(i) M は A の素イデアルである.

(ii) $(x-1)^2 \in M$ かつ $y(x^2-1) + (y-2)(x^2+1) \in M$ である.

以下の問に答えよ.

(1) $M = (x-1, y-2)$ かつ M は A の極大イデアルであることを示せ.

(2) I を A のイデアルとするとき, A の I による剰余環を A/I で表す. A のイデアル I で, A/I が A/M と環同型となるものをすべて求めよ. また, A の極大イデアル J で, A/J が A/M と環同型でないものの例を具体的に 1 つ求めよ.

(3) A のイデアル K による剰余環 A/K を自然に A-加群とみなす. A のイデアル K で, A/K が A/M と A-加群として同型となるものをすべて求めよ.

[3] M を C^∞ 級可微分多様体とし, f を M 上の実数値 C^∞ 級関数とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) ある点 $P \in M$ において, $(df)_P \in T_P^*M$ は $(df)_P \neq 0$ をみたすとする. このとき C^∞ 級可微分曲線 $\varphi : (-1,1) \to M$ であって, $\varphi(0) = P$ かつ $(f \circ \varphi)'(0) > 0$ となるものが存在する.

(2) M がコンパクトならば, $(df)_P = 0$ となる点 $P \in M$ が存在する.

[4] 実ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の 2 点 (x,y), (x',y') に対し, $x'=2^n x$ かつ $y'=2^n y$ となる整数 n があるとき, $(x',y') \sim (x,y)$ と定める. この同値関係 $\sim$ による商空間を

$$S = \mathbb{R}^2/\sim$$

とし, 写像

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to S$$

を $\mathbb{R}^2$ から S への射影 (商写像) とする. S の部分集合は S の商位相から誘導される自然な位相により位相空間とみなす. 以下の問に答えよ.

(1) S はハウスドルフ空間ではないことを示せ.

(2) S の部分集合 T を $T = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ と定める. T はコンパクトであることを示せ.

(3) 整数係数ホモロジー群 $H_1(T \setminus \{\pi((1,0))\}, \mathbb{Z})$ を求めよ. ここで, T は (2) で定めたものである.

[5] 次のルベーグ積分が意味をもつような関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) f(y)dy$$

とおく. ただし, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) f が $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分であるとき,

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \right) = 0 \ .$$

(2) f が $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続のとき, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x) \ .$$

(3) f が $\mathbb{R}$ 上有界かつルベーグ可測のとき,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \ .$$

[6] μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする. A は $\mathbb{R}$ の閉集合で $A \neq \mathbb{R}$ かつ $\mu(A^c) < \infty$ をみたすものとする. ここで, A^c は A の補集合を表す. $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\rho_A(x) = \inf \{ |x - \xi| \mid \xi \in A \} ,$$

$$F_A(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_A(y)}{(x-y)^2} d\mu(y)$$

と定める. 次が成り立つことを示せ.

(1) すべての $x \in A^c$ に対して $F_A(x) = +\infty$.

(2) 正の実数 C が存在して, すべての $y \in A^c$ に対して

$$\int_A \frac{1}{(x-y)^2} d\mu(x) \leq \frac{C}{\rho_A(y)} .$$

(3) μ に関し, ほとんどすべての $x \in A$ に対して $F_A(x) < +\infty$.