2023年度（令和5年度）大学院入試

数 学 問 題 A

実施日時

2022年（令和4年）8月24日（水）

9:00〜12:00

- 監督者の合図があるまで問題冊子を開いてはならない.
- 問題冊子は表紙も入れて5枚，問題は全部で4問である.
- 解答は，問題ごとに別々の答案用紙1枚に記入すること.
  答案用紙の裏面に記入してもよい.
- それぞれの答案用紙に受験番号，氏名，問題番号を記入すること.
- 答案用紙，下書き用紙は終了後すべて提出し，持ち帰ってはならない.

[1] $\mathbb{R}$ 上の関数

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n + \sin x} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

および，第 n 項が関数 $f_n(x)$ であるような級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ は収束することを示せ.

(2) 任意の実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ は発散することを示せ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ.

[2] n を正の整数とする．V を n 次元複素ベクトル空間とし，$f\colon V \longrightarrow V$ を線形写像とする．正の整数 m に対し，f の m 回合成写像を f^m とする．零ベクトルとは異なるベクトル $w \in V$ に対し，$w, f(w), \ldots, f^{n-1}(w)$ で生成される V の部分空間を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f^n(w) \in W$ を示せ．

(2) W の次元が k ならば，$w, f(w), \ldots, f^{k-1}(w)$ は W の基底になることを示せ．

(3) W の次元が n で，かつ w が f^n の固有値 α に属する固有ベクトルであるとき，f の固有多項式を求めよ．

[3] ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) に対して，ある正の実数 r が存在して $(rx_1, r^{-1}y_1) = (x_2, y_2)$ が成り立つとき，$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ であると定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ．

(2) 点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ の同値類 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \sim (a, b)\}$ を $A_{a,b}$ で表す．また線分 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ を I で表し，

$$B = \bigcup_{(a,b)\in I} A_{a,b}$$

とおく．B の $\mathbb{R}^2$ 内での閉包を $\overline{B}$ で表す．このとき $\overline{B} \setminus B$ を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^2$ から原点 $(0, 0)$ を除いた集合の同値関係 $\sim$ による商空間

$$\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\right) / \sim$$

を X とする．X はハウスドルフ空間ではないことを示せ．

[4] 以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ の円環領域 $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(2) 整関数 $f(z)$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| \leq |\sin z|$ を満たすとする．このとき，ある $a \in \mathbb{C}$ が存在して，$f(z) = a \sin z$ であることを示せ．

(3) $g(z)$ が整関数のとき，$\overline{g(\overline{z})}$ も整関数であることを示せ．ここで $\overline{w}$ は複素数 w の複素共役を表す．