17. 聯立線形常微分方程式ノ解ノ topologische Abbildungen ニ就テ

中野秀五郎（一高）

紙上談話会5号ニ於テ線形常微分方程式ノ解ノtopologisch Abbildungenニ関シテ述ベタ．次ニ当然聯立線形常微分方程式ノ場合ハ如何トイフ問題ガ起ル，然シ此場合ハ非常ニ簡単ニシテ問題ニナラヌトイフコトヲ此處ニ注意シタイ．幾何学的ニ考ヘテ互ニ交ラズ且 $n+1$ 次元空間ヲ充タス曲線ノ Schar ハ又他ノ斯ノ如キ Schar ニ topologische ニ abbilden サレルコトハ明デアルニツノ n 階線形常微分方程式ヲ

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_i+b_i(x)\qquad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots,n)\\(a<x<b)\end{matrix}$$

$$(2)\qquad \frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)z_i+d_i(t)\qquad \begin{matrix}(i=1,2,\cdots,n)\\ \alpha<t<\beta\end{matrix}$$

トスル．然ルトキハ(1),(2)ノ解ハ

$$(3)\qquad y_i=y_i(x\,|\,x_0,\ y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})$$

$$(4)\qquad z_i=z_i(t\,|\,t_0,\ z_1^{(0)},\cdots,z_n^{(0)})$$

ナルガ如キ形ニ表ハサレル．此所ニ $x=x_0$ ナルトキ $y_i=y_i^{(0)}$，又 $t=t_0$ ナルトキ $z_i=z_i^{(0)}$ ナルモノトス．今 n 次元全空間ヲ n 次元全空間ヘノ任意ノ topologische Abbildung ヲ

$$(5)\qquad z_i^{(0)}=\varphi_i(y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

トス．又

$$(6) \qquad t = \Psi(x \mid y_1^{(0)}, \cdots, y_n^{(0)})$$

ハ $y_i^{(0)}$ ヲ固定シタトキ, $a<x<b$ ヲ $a'<t<b'$ ヘノ任意ノTopologische Abbildungトシ, n個ノ変数 $y_i^{(0)}$ ニ対シ連續トス. 然ルトキハ又 $n+1$ ノ変数 $x, y_i^{(0)}$ ニ関シテモ連續ナルコトハ簡單ニ証明サル. 一方(3)或ハ(4)ハ $y_i^{(0)}$ 或ハ $Z_i^{(0)}$ ニ関シテ一意的ニ解クコトヲ得ルヲ以テ(3), (4), (5), (6)ヨリ $y_i^{(0)}, Z_i^{(0)}$ ヲeliminateセバ

$$Z_i = \Phi(x, y_1, \cdots, y_n, \mid x_0, t_0)$$

$$t = \Psi(x, y_1, \cdots, y_n \mid x_0, t_0)$$

ナル $n+1$ 次元空間ノTopologische Abbildungヲ得ル. ココデ x_0, t_0 ハ常数トシテ固定シテ置クモ, φ_i, Ψ ヲ色々ト取ルコトニヨリ(1)ヨリ(2)ヘノ任意ノTopologische Abbildungヲ得ル. 上ノ証明ニテハ(1)或ハ(2)ガ線形ナルコトヲ必要トセズシテ唯(3)或ハ(4)ノナルガ如キ解ヲ有ス可キコトノミガ必要トサレテヰル.

以上ニテ全テノTopologische Abbildungenガ求メラレタルモ実際計算ノ上ニテハ次ノ如キガ便利ナラント思フ. 簡單ノ為ニ(1)ヲMatrix及ビVektorノ形ニテ記セバ

$$\mathfrak{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$$

$$\mathfrak{A}(x) = (a_{ij}(x))$$

$$b(x) = [b_1(x), \cdots, b_n(x)]$$

$$(7) \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{dx} = \mathfrak{A}(x)\mathfrak{y} + b(x).$$

(7)ノ一解ヲ $\mathfrak{y}_0$ トシテ

$$\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0$$

ト置ケバ (7) ハ

$$(8)\qquad \frac{d\bar{y}}{dx}=a(x)\bar{y}$$

トナル. コレハ n 個ノ独立ナ解ヲ $\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n$ ヲ有シ, 行列式

$$X(x)=[\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n]$$

ガ零ニアラザルコトハ聯立線形微分方程式ノ理論ヨリヨク知ラレタル所ナリ. 次ニ

$$\bar{y}=X(x)\bar{\bar{y}}$$

トシケバ (8) ヨリ

$$\frac{dX(x)}{dx}\bar{\bar{y}}+X(x)\frac{d}{dx}\bar{\bar{y}}=a(x)X(x)\bar{\bar{y}}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\bar{\bar{y}}=0$$

ヲ得ル. 故ニ (7) ハ

$$\mathfrak{C}=\{X(x)\}^{-1}\{y-y_0\}$$

ナル変換ニテ

$$\frac{d}{dx}\mathfrak{C}=0$$

ニ変換サル. 同様ニシテ (2) モカカル形ニ変換セバ, 後ハ

$$\frac{dy}{dx}=0$$

ヲ区間ノ異ナル所ヘノ Topologische Abbildung ニナリ, 第一階ノ場合ノ問題トナル. (9.8.17 受取)