32. Abel's integral equation. f

佐藤常三（京大）

誰シモ Abel's integral equation ノ解法ハ實際巧妙ナ技巧デアルコトヲ沁ミジミ感ジサセラレルコトト思ヒマス．又物理学上ノ問題デ随分ト此ノ形ニ歸着セシメラレルモノノ多イコトモ經驗シマス．扨テコノ基本的デ古典的ナモノハ，

$$(1)\qquad \int_{s=+0}^{x} \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}} = f(x) \qquad (0<\alpha<1)$$

デアリマス，此ノ解ハ

$$(2)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}$$

デアリマス，一般ニ計算ノミヲ示シマスガ使用スル函数ニハ適當ニ條件ヲ與ヘタモノトミテオキマス ―(2)ヲ發展サセテ

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\right)$$

トシタノハ Goursat デアルコトハヨク知ラレテ居マス，右辺ノ積分ヲ更ニ發展サセマスト

$$(4)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{f'(+0)}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{f''(+0)}{\alpha(\alpha+1)}x^{\alpha+1} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{f^{(n)}(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}x^{\alpha+n-1} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}(x-z)^{\alpha+n-1}f^{(n+1)}(z)\,dz\right)$$

(1)ノ形ノ擴張ヲ考ヘマス，

$$(7)\qquad \int_{s=+0}^{x}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (\beta>-1,\ \beta\neq 0)$$

コレハタシカニ(1)ヲ含ミマス，コノ様ニ $(x-s)$ ノ exponent ニヨッテ，Abel ノ積分方程式ノ擴張ガ Rudolf Rothe; Zur Abelschen Integralgleichung, Math. Zeit

Bd. 33 (1931) pp. 375 — 387 ノ論文ニアリマス. 私ハ次ノ如キ拡張ヲ考ヘテ,其ノ結果ニコノ論文ノ内容ヲ弁償シテ,了ヒマシタ. (1) ニ対シテ

(A) $$\int_{+0}^{x}\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\int_{+0}^{s_{n-2}}\frac{\varphi(s_{n-2})}{(x-s)^{\alpha}(s-s_1)^{\alpha_1}\cdots(s-s_{n-2})^{\alpha_{n-2}}}\,ds\,ds_1\cdots ds_{n-2}=f(x)$$

(B) $$\int_{a+0}^{\tau(x)}\frac{\varphi(s)}{[\tau(x)-s]^{\alpha}}\,ds=f(x) \qquad (\tau(+0)=a)$$

(C) $$\int_{+0}^{x}\frac{\varphi(s)\,ds}{[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=f(x)$$

(D) (A), (B), (C) ノ混合物

ヲ考ヘタノデアリマス. (B) ハ (C) ニ変換サレマスカラマヅ (C) カラ始メマス. 積分変数ヲ

$$\begin{cases}\tau(x)=\tau(s)+[\tau(z)-\tau(s)]t\\ \tau'(x)dx=[\tau(z)-\tau(s)]dt\end{cases}$$

デ $x\to t$ ニ変換シマスト

$$\int_{x=s+0}^{z}\frac{\tau'(x)\,dx}{[\tau(z)-\tau(x)]^{1-\alpha}[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=\int_{+0}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha}t^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

コレヲ利用シテ,全ク古典的ナ場合ノ処理ト同様ニシマスト, (2) ニ対応シテ

(2′) $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\tau'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}$$

(3) ニ対応シテ

(3′) $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{[\tau(x)-\tau(+0)]^{\alpha-1}\tau'(x)f(+0)+\tau'(x)\int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}\right\}$$

(4) ニ対応シテ

(4′) $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{f(+0)}{\tau_{1-\alpha}}+\frac{f_1(+0)}{\alpha}\tau_{\alpha}+\frac{f_2(+0)}{\alpha(\alpha+1)}\tau_{\alpha+1}+\cdots\right.$$
$$+\frac{f_n(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\tau_{\alpha+n-1}+\frac{\tau'(x)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}f_n'(z)[\tau(x)-\tau(z)]^{\alpha}d$$

但シ $$f_i(z) \equiv \frac{f_{i-1}'(z)}{\tau'(z)}, \quad f_1(z) \equiv \frac{f'(z)}{\tau'(z)}, \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\tau_q \equiv \left[\tau(x)-\tau(+0)\right]^q \tau'(x),$$

勿論冒頭ニ断ハッタ様ニ $f(+0)$, $f_1(+0) \equiv \dfrac{f'(+0)}{\tau'(+0)} \left(= \lim\limits_{z\to+0} \dfrac{f'(z)}{\tau'(z)} \right)$, ‐‐‐‐

等ノ存在ガ吟味サレネバナリマセン、以上ノ結果ニ Rothe ノ拡張 (7) ヲ借用デキマス，扨テ (A) ハ

$$\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\, ds_1 ds_2 \cdots ds_{n-2} \equiv \Phi(s)$$

トオケバ

$$\int_{+0}^{x} \frac{\Phi(s)}{(x-s)^{\alpha}}\, ds = f(x)$$

トナルカラ，古典的ノ問題ニ歸着セシメラレマス，コレデ (D) ガ完全ニ処理デキルト思ヒマス，

附記：コノ理論ハ化学上重要ナ応用問題ヲ解決スルモノデ，追テ近日中本論ト共ニ発表シマス，

(4月7日受取)，