36. 正則函數ノ單葉性及ビ多葉性ニツイテ

鍋谷堅次郎(東北大)

本誌オ9号ニ載セラレタ高橋進一氏ノ「函数ノ單葉性ノ一判定條件」ヲ興味深ク讀ミマシタ。其最初ノ定理ハ実質ニ於テ Landau 及ビ J. Dieudonné ノ得タ定理 (Ann. l'Ecole Norm. Sup. III Sér., t. 48, 1931 p. 349) ニ含マレル様ニ思ヒマス。証明法ハ Cauchy ノ積分公式ヲ用ヒルモノデ非常ニ面白イト思ヒマス。私ハ此方法ヲ用ヒテ次ノ様ナ結果ヲ得マシタ。

定理 1. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ正則デ且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)-z|\,d\varphi \leqq M<1 \quad , \quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スル函数トスレバ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt{M}$ ニテ單葉デアル

証明。 $f(z)=z+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta$, $|z|<\rho<1$ デスカラ.

$|z_1|<\rho$, $|z_2|<\rho$ トスルト

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_1-z_2}=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\,d\zeta$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\,d\zeta\right| \leqq \frac{\rho}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\left|\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\right|d\varphi.$$

$$\leqq \frac{M\rho}{(\rho-|z_1|)(\rho-|z_2|)}$$

ダスカラ $\dfrac{M\rho}{(\rho-|z|)^2}<1$ 即チ $|z|<\rho-\sqrt{M\rho}$ ナル円内ニ z_1, z_2 ガアルトスレバ

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\zeta\right|<1.$$

トナリ先ノ等式ニヨリ $\dfrac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\neq 0$. 故ニ $f(z)$ ハ $|z|<\rho-\sqrt{M\rho}$ ニ於テ単葉トナリ, $\rho\to 1$ トスレバ定理1ガ得ラレマス。

定理1ニ於ケル條件ヲ, $|f(z)-z|\leqq M$, $|z|<1$ デ置キカヘ Dieudonné ノ方法ニ倣ツテ $f(z)$ ノ単葉半径ヲ正確ニ出スコトハ興味アル問題デスガ簡単ニ行カナイ様デスカラユツクリ考ヘテミヨウト思ヒマス。

定理2. $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則デ(今後単ニ $f(z)$ トヨヘバ常ニ以上ノ性質ヲ備ヘテヰルモノトシマス)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|u(z)-r\cos\varphi|\,d\varphi\leqq M<\frac{1}{2},\quad 0<r<1$$

$$u(z)=\Re\{f(z)\}$$

ナル條件ヲ満足スルモノトスレバ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt{2M}$ ニ於テ単葉デアル

此定理ヲ証明スルニハ Poisson ノ公式ニヨリ

$$f(z)=z+\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}(u(\zeta)-\rho\cos\theta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta$$

デスカラ

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=1+\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}(u(\zeta)-\rho\cos\theta)\frac{2\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}d\theta,$$

之関係ヲ用ヒテ定理1ノ証明ト同様ニヤレバヨイ。

定理3. $f(z)$ ガ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots|\,d\varphi\leqq M<|a_n|,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<1-\sqrt[n+1]{\frac{M}{|a_n|}}$ ニテ高々 n 葉デアル

此定理ヲ証明スルニハ

$$\Delta_0(z_1)=f(z_1), \quad \Delta_1(z_2,z_1)=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}, \quad \cdots\cdots$$

$$\Delta_k(z_{k+1},z_k,\cdots,z_1)=\frac{\Delta_{k-1}(z_{k+1},z_{k-1},z_{k-2},\cdots,z_1)-\Delta_{k-1}(z_k,\cdots,z_1)}{z_{k+1}-z_k}$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

トスルト

$$\Delta_n(z_{n+1},z_n,\cdots,z_1)=a_n+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-(a_0+a_1\zeta+\cdots+a_n\zeta^n)}{(\zeta-z_{n+1})(\zeta-z_n)\cdots(\zeta-z_1)}d\zeta$$

デスカラ，後ハ定理 1, 2 ノ証明ト同様ニヤレバヨイ。

定理 4. $f(z)$ ガ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|\Re\{a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots\}|d\varphi\leqq M<\frac{|a_n|}{2}, \quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $|z|<1-\sqrt[n+1]{\frac{2M}{|a_n|}}$ ニ於テ高々 n 葉デアル。

証明ハ定理 1, 2, 及ビ 3 ノソレカラ推シテ明カデス。

E. Egerváry, Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, Math. Ann., 99 (1928), 542-561 ノ 560頁ヲミマスト次ノ様ナ定理ガアリマス。

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots\cdots$$

ヲ $|z|\leqq 1$ デ正則トシ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|d\theta\leqq 1$ ナルトキハ

$$\mathfrak{M}_\varphi(r)=|\alpha_0|+|\alpha_1|r+\cdots+|\alpha_n|r^n+\cdots\leqq\frac{1}{1-r^2}, \quad 0<r<1$$

コノ結果ヲ用ヒルト次ノ二ツノ定理ガ容易ニ得ラレマス。

定理 5. $f(z)$ ガ $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)|r\,d\varphi\leqq M<2, \quad 0<r<1$

ナル條件ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<\sqrt{1-\frac{M}{2}}$ ナル円ヲ原点ニ関スル星型領域ニ等角ニ描写スル.

定理6. 上定理ニ於ケル條件ヲ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)-1|d\varphi \leqq M<1,\quad 0<r<1$$

デヲキカヘルト $f(z)$ ハ $|z|<\sqrt{1-M}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ、等角ニ描写シマス。

定理5, 6 ハ上述ノ Egerváry ノ定理ヲ用ヒテ次ノ定理カラ導キ出スノデス.

$f(z)$ ハ $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}<1$, $0<r<1$

ヲ成立セシメル様ナ r ニ対シテ $|z|\leqq r$ ナル円ヲ原点ニ関スル星型領域ニ等角ニ描写スル.

此定理ハ能代清氏ノ On the star-shaped mapping by an analytic function, Proc. Imp. Acad Vol. 8, no. 17, 1932 ニ発表サレテ居マスガ J. W. Alexander ガ既ニ 1915 ニ Ann. of Math ニ出テ居マス。定理5ノ條件ヲ $|f'(z)|\leqq M$, $|z|<1$ デ置キカヘテ正確ナ星型半径ヲ出スコトハ上ノ能代氏ノ論文ニ於テナサレテ居マス。定理6ノ條件ヲ $|f'(z)-1|\leqq M$, $|z|<1$ デヲキカヘテ同様ノ結果ヲ求メル問題ハ能代氏ノ方法ヲ用ヒテ殆ド同様ニ出来マス。結果ヲ書クト

定理7. $f(z)$ ガ $|f'(z)-1|\leqq M$, $|z|<1$ ヲ滿足スルトキハ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{1}{\sqrt{M^2+1}}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ描写スル。コノ結果ハ最良ノモノデアル。

序ニ述ベマスト私ハ能代氏ノ方法ニヨリ $f(z)$ ニ各々

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ与ヘテ夫々星型半径及ビ凸型半径ヲ正確ニ出シマシタガ其原稿ハ藤原先生ノ御手許ニ呈出シテアリマスカラ其内ニ発表サレルコトト思ヒマス．尚此種上ノ條件ノ外ニ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f''(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'''(z)|^2 d\varphi \leqq M^2,\quad 0<r<1$$

ナル條件ノ下デモ同様ノ方法デ星型半径及ビ凸型半径ガ正確ニ求マルコトヲ知リマシタ。

定理 8．$f(z)$ ガ $f'(z) \neq 0$, $|z|<1$, 及ビ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}|f'(z)|\,d\varphi \leqq M,\quad 0<r<1$$

ナル條件ヲ満足スルトキハ $|z|<\frac{1}{M+1}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ，$|z|<1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}$ ヲ凸型領域ニ描寫スル．

證明．$f'(z)$ ガ $|z|<1$ デ 0 トナラナイカラ

$$\sqrt{f'(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\quad c_0=1$$

ハ $|z|<1$ デ一價正則デス．故ニ $r<1$ ナルトキ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0\,(|z|=r)}^{2\pi}|f'(z)|\,d\varphi=|c_0|^2+|c_1|^2r^2+\cdots\cdots+|c_n|^2r^{2n}+\cdots\leqq M,$$

又 $f(z)=\int_0^z\left(\sqrt{f'(z)}\right)^2dz=z+\frac{1}{2}(c_0c_1+c_1c_0)z^2+\cdots\cdots$

$$+\frac{1}{n+1}(c_0c_n+c_1c_{n-1}+\cdots+c_nc_0)z^{n+1}+\cdots\cdots,$$

然ルニ $|c_0c_n+\cdots+c_nc_0|\leqq(|c_0c_n|+|c_1c_{n-1}|+\cdots+|c_nc_0|)$

$$\leqq |c_0|^2+|c_1|^2+\cdots+|c_n|^2 \leqq M$$

デアルカラ $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{M}{n}r^{n-1} = \frac{Mr}{1-r} < 1,\ r<r_0$

$$\frac{Mr_0}{1-r_0} = 1 \quad 或ハ\ r_0 = \frac{1}{M+1}$$

即チ $|z| < \frac{1}{M+1}$ ガ原点ニ関スル星型領域ニ描写サレマス。又

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|r^{n-1} < 1\ ,\ 0<r<1$$

ヲ満足スル r ニ対シテ $|z| \leqq r$ ガ凸領域ニ描写サレマスカラ（前掲ノ能代氏ノ論文参照）

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|r^{n-1} \leqq \sum_{n=2}^{\infty} nMr^{n-1} = \frac{M}{(1-r)^2} - M < 1,\ r<r_0$$

$$\frac{M}{(1-r_0)^2} - M = 1 \quad 或ハ\ r_0 = 1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}.$$

上ノ定理ニ於テ $\sqrt{f(z)}$ ガ一価正則ナルコトヲ利用スルコトハ次ノ論文カラ引用シタモノデス。

S. Warschawski, Über Einige Konvergenzsätz aus der Theorie der konformer Abbildung, Göttinger Nach., 1930, S. 344–369, S. 344.

上ノ定理ト同様ニシテ次ノ定理ガ成立シマス。

定理 9. $f(z)$ ガ単位円内デ $\frac{f(z)}{z} \neq 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|d\varphi \leqq M\ ,\ 0<r<1$$

ナル条件ヲ満足スルトキハ $|z| < 1-\sqrt{\frac{M}{M+1}}$ ヲ原点ニ関スル星型領域ニ描写シ, $r^3-3r^2+(M^2+3)r-1=0$ ノ唯一ノ正根ヲ r_0 トスルト $|z|<r_0$ ナル円ヲ凸領域ニ描写スル。

定理10. $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ 及ビ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\log^+\left|\frac{f(z)}{z}\right|d\varphi \leqq M\ , \quad 0<r<1$$

ヲ満足スルトキハ $|z|<2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ ナル円ヲ原点ニ関スル星型領域ニ描写スル.

証明. $|z|<1$ デ $\frac{f(z)}{z}\neq 0$ デアルカラ $\log\frac{f(z)}{z}$ ハ調和函数デ Poisson ノ公式ニヨリ

$$\log\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\vartheta,\ |z|<\rho.$$

ヨッテ

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}-1=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}\,d\vartheta$$

故ニ $\Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$ ナル為ニハ右辺ノ絶対値ガ1ヨリ小ナラヨイ。

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\frac{2\zeta z}{(\zeta-z)^2}\,d\vartheta\right|\leqq\frac{2\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\left|\log\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|\right|d\vartheta$$

$$=\frac{2\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}\,\frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|=\rho}\log^+\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|d\vartheta\ \leqq\ \frac{4M\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}.$$

$$\frac{4M\rho r}{(\rho-r)^2}=1 \text{ 或ハ } r^2-2\rho(M+1)r+\rho^2=0$$

ヲ解イテ $r_0=2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ トスレバ $|z|<r_0$ ニ対シテ

$$\frac{4M\rho|z|}{(\rho-|z|)^2}<1$$

故ニ定理10ガ証明サレマシタ.

定理10ト同様ニシテ次ノ定理ガ証明サレマス。

定理 11. $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ $|f(z)|\neq 0$ 及ビ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \overset{+}{\log}|f(z)|\,d\varphi \leqq M, \quad 0<r<1$$

ヲ満足スルトキハ $|z|<2M+1-\sqrt{(2M+1)^2-1}$ ヲ凸領域ニ等角ニ写像スル。（9.9.19 受取）