37. 函数ノ orthogonal function system ニヨル展開ニ付テ

高橋龍夫(東北大)

Haar ガソノ有名ナ Dissertation (Math. Ann. 61, 1912.) ノ中デ函数ノ orthogonal function system ニヨル展開ニ関シ次ノ定理ヲ証明シテヰル。

I. $(\varphi_i(s))$ ヲ $[0,1]$ デ integrable ナ orthogonal function system トシ a ヲ $[0,1]$ ノ一点トスル。

$$K_n(a,s)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a)\varphi_i(s),\quad \omega_n=\int_0^1|K_n(a,s)|ds$$

トシク。若シ (ω_n) ガ bounded デナケレバ一ツノ continuous funct $f(s)$ ガ存在シテ夫ノ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier Series ガ $s=a$ デ diverge スル。

II. 全テノ continuous function ガ上ノ orthogonal function system $(\varphi_i(s))$ デ uniformly approximable デ (ω_n) ガ bounded ナラバ全テノ continuous functions ノ Fourier series ハ $s=a$ デ converge スル。

(コノ種ノ定理ニ関シテハ H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatsheft f. Math. und Physik, 32, 1922; H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. Acad. Cracovie, A, 1926 等参照)

今之等ノ定理ヲBanachノlinear operationsノtheory＝於ケル簡単ナ定理ヨリ導キ，合セテ上ノ結論ノ様ナcontinuous functionガ実際ドノ位多クアルカヲ験ベテミヨウ。ココデ使フ定理トイフノハ次ノ三ツデアル。

(α)　$(u_n(x))$ ヲ type(B) ノ space デ定義サレタ linear functionals（functional トイヘバソノ contra-domain ガ実数全体ヨリナル space デアル）ノ sequence トスル。若シ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|u_n(x)\|$ ガ 2nd category ノ set デ finite トスルト $\|u_n\|<M$ ナル M ガアル（n＝independent ナM）

(β)　linear functional ノ sequence $(u_n(x))$ ガ type(B) ノ space E ノ中ノ一ツノ sphere K デ dense ナ set デ converge シ $\|u_n\|<M$ ナル M (n= independent) ガアレバ $(u_n(x))$ ハ space ノ全テノ点デ converge スル。

(γ)　continuous functions ノ space (C) デ定義サレタ全テノ linear functional ハ

$$u(x)=\int_0^1 x(s)\,dg(s) \qquad \text{(Riemann-Stieltjes 積分)}$$

トカケル。ココニ $g(s)$ ハ $x(s)$ ニハ independent ナ bounded variation ノ函数デ $\|u\|=\int_0^1|dg(s)|$ デアル。

術語ハ全テ Banach: Théorie des opérations linéaires, ニヨル。(α),(β) ハ Banach-Steinhaus, Sur les principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9 (1927) 中ノ Lemma 2, 3 デ (γ) ハ F. Riesz ニ負フモノデアル。

先ヅ II ヲ証明スル。今

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a)\int_0^1 x(s)\varphi_i(s)\,ds=\int_0^1 x(s)K_n(a,s)\,ds$$

トスルト明カニ $u_n(x)$ ハ (C) デ linear デアル。且假定ニヨリ $\varphi_i(s)$ ノ linear combinations $\sum_{i=1}^{n}c_{in}\varphi_i(s)$; c_{in} ハ constant, ハ (C) デ dense デ之ノ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier series ハ converge スルコトハ明デアル。又 (γ) ニヨリ

$$\int_0^1 x(s)\,dg_n(s)=\int_0^1 x(s)K_n(a,s)\,ds=\int_0^1 x(s)\,d\left(\int_0^s K_n(a,v)\,dv\right)$$

ナル如キ bounded variation ノ函数 $g_n(s)$ ガアル。而モコノ関係ハ全テノ continuous function $x(s)$ ニツイテ成立スルカラ

$$g_n(s)=\text{const.}+\int_0^s K_n(a,v)\,dv \quad \left(\begin{array}{l}\text{const. ハ } n \text{ ニ depend}\\ \text{スルカモシレナイ}\end{array}\right)$$

故ニ $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M$ ナラバ $\|u_n\|=\int_0^1|dg_n(s)|<M'$ ナル M' ガアル、何者 const. ノ totalisation ハ zero デアルカラ。故ニ (β) ニヨリ II ガ証明サレタ。

次ニ I ヲ証明シヨウ。II ノトキト同ジ notation ヲ用ヒル、若シ全テノ continuous functions ノ Fourier series ガ $s=a$ デ converge スレバ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n(x)$ ガ各々ノ x ニ付テ finite デアル。故ニ (α) ニヨリ $\|u_n\|<M$ デアル。即チ $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M'$ トナル。之ハ矛盾(假定ニ)デアル。之デ I ガ証明サレタ。

コノ証明デ (C) ノ中ノ second category set ノ函数ノ Fourier series ガ converge スルトシテモ同様ノ結論ニナル。故ニ Fourier Series ガ converge スル様ノ continuous functions $\int_0^1|K_n(a,s)|\,ds<M$ ガ成立シナイ限リ 2nd category set ヲ作リ得ナイ。故ニ次ノ定理ガ得ラレル。

III. モシ (ω_n) ガ bounded デナケレバ $s=a$ デ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier series ガ diverge スル様ナ continuous functions ハ (C) ノ中デ 2nd category ノ set ヲ作ル。

尚同様ノ考ヘデ次ノ定理ガ得ラレル。

I′. $(\varphi_i(s))$ ヲ $L^\beta\ (\beta>1)$ ニ属スル函数ノ orthogonal system トスル。$K_n(a,s)$ ハ I ト同様ニ定義スル。

$$\overline{\omega}_n = \left(\int_0^1 |K_n(a,s)|^\beta ds\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

トシタトキ モシ $(\overline{\omega}_n)$ ガ bounded デナケレバ $s=a$ デ $(\varphi_i(s))$ ニヨル Fourier series ガ diverge スル如キ $L^\alpha\ (\alpha>1,\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1)$ ニ属スル函数ハ (L^α) ノ space デ 2nd category ノ set ヲ作ル。

II′. モシ全テノ L^α ニ属スル函数ガ $(\varphi_i(s))$ デ α-th mean ニ於テ approximable $(\beta\geqq\alpha$ トスル$)$ デ且 $(\overline{\omega}_n)$ ガ bounded ナラバ全テノ L^α ニ属スル函数ノ Fourier series ハ $s=a$ デ converge スル。 (9.9.19 受取)