全國紙上數學談話會第15号.　　十月

41. Das Dehnsche Lemma ニ就テ

小松醇郎（阪大）

M Dehn ハ Math. Ann. 69 Bd. デ以下ニ述ベル所謂 Dehnsches Lemma ナル定理ヲ證明シタ. 所ガ後ニソノ証明ノ缺陷ヲ指摘シタノハ H. Kneser デアル. (Jahresbericht der Deut. Math. Verein. 38 Bd.). 本年 I. Johanssen ガ此ノ Vermutung ヲ進メテ „Dehn-Diagramm" ナル概念ヲ導入シテ居ル. (Math. Ann. 110 Bd) dass Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メテ此ノ Dehnsches Lemma ノ證明ヲ完了シタトカラ 此下此ノ證明ニ必要ナ Dehn, Johansson ノ結果ヲ紹介シ後ソレヲ利用スル事ノ証明ヲ述ベテ見マス.

Das Dehnsche Lemma:

Jede geschlossene Kurve K, die in einer homogenen topologischen Mannigfaltigkeit M von wenigstens drei Dimensionen eine singuläre (d.h sich selbst durchdringende) Elementarfläche berandet, auch eine singularitätenfreie Elementarfläche in M berandet, wenn bloss die Kurve K selbst von den Singularitäten nicht getroffen wird.

茲デ homogen トハソノ各点ノ Umgebung ガ常ニ M ノ次元ノ球内部ト homöomorph デアル事ヲ表シ, Elementarfläche (singularitätenfreie) トハ一ツノ二次元 Simplex ト homöomorph ナモノ, singulär トハソノ eindeutige stetige Bild (eineindeutig デハナイ) ヲ表ス.

Dehn ハ先ヅ M ガ 3 次元ヨリ高次元ナラバ trivial, ソコデ 3 次元ノミヲ考ヘル

1. AB (A≠B) ガ幾重ニモ重ナッタ Strecke トスル、即 Singularitätenfreie Elementarfläche 上ノ多クノ Strecke ガ AB ニ stetig abbilden シテ居ル、M homogen カラ AB ノ Umgebung ハ Elementarraumstück、ソコデ AB ニ沿ウテ交凡ベテノ Blätter ハ切スルモノデアルト假定スル、此ノ各 Blätter ノ代リニ充分イ Blätter ヲ代用シテ AB ヲ通ラズ且新シイ Singularitäten ガ生ジナイ様ヲ出ル、

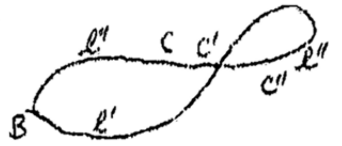
A' ガ幾重ニモ重ナレル点トシ且 A カラ出ル Singuläre Strecke ハナイトスルモ多クノ Blätter ガ切スルダケダカラ前ト同様ナ prozess デ Singularitätenfrei ナル

2 n重 $(n>2)$ ニ数ヘラレル singuläres Strecke ハ各 Blätter ノ近イモノヲ代スル事ニヨツテ 2重ノ Singuläre Strecke ノミトナル、

n重 $(n>3)$ ニ数ヘラレル Singulärer Punkt モ同様ニ benachbarte Blätte ノ代用ニヨリ 3重ノモノニ歸着スル、1 ニ依リ結局此ノ Singularitäten ハ交ル合ノミデアル、

ソコデ先ヅ Singuläre Linie ノウチソレガ ungeschlossen ノ場合ハ次ノ如ク Singularitätenfrei ニナル、Singularitätenfreie Elementarfläche E^2, ソノ eindeutige stetige Bild ヲ E'^2 デ表ス、E'^2 上 AB ヲ Endpunkt トスル singuläre Linie l ニ対シ E^2 上 l', l'' ガ対應スル、E^2 上デ singuläre Linie ノ Urbild ガ ungeschlossen ト言フ事ハアリ得ナイ (E^2 ノ Rand ハ singularitätenfrei) カラダ、

図

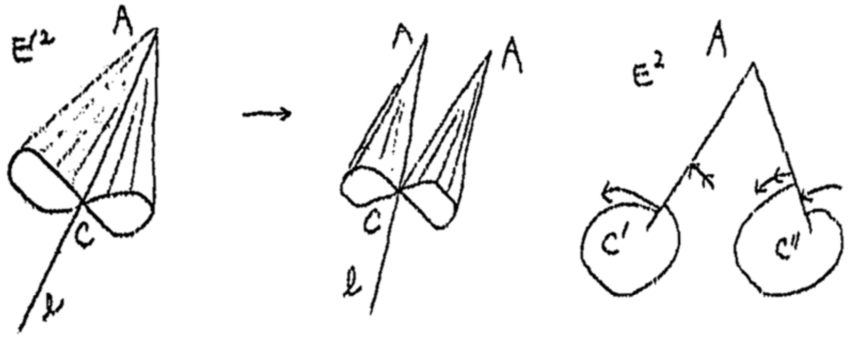


A, B : Verzweigungspunkt

l', l'' ノ交点 C ハ l' 上ノ点ト考ヘルト C' 之ガ E'^2 デ

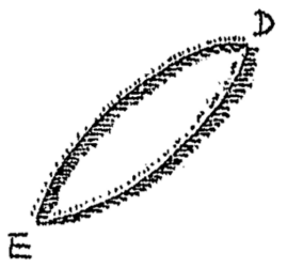
ト重ナル点C''ハ一般ニE^2デハC'ト一致シナイ。

AC'トAC''トガE'^2デ自切線。ソレ故E'^2上ノACノ線ニ沿ヒ〟Umschaltung 行フ。即ACニ沿ヒ結合方法ヲ変ヘ新シイ Blätter ハACデ互ヒニ切スル様ニス



えデ前ニ一重ノ点Aガ二ニ、二重ノ点Cガ一重ニナ是ニ依ッテ頂点ノ数ハ不従テおいれる指標モ不変且 zusammenhängend ダラ矢張リ一様連結デアル。

Cカラ又 ungeschlossene Doppellinie ガ出ル。此処デ同様ナ手続キヲ行ヒ結E^2上デl', l''ト交ハラナイ様ニナル。 $DE = \{(DE)', (DE)''\}$ デ $(DE)'$, $(DE)''$ 交ラナイトスルト圖ノ如ク結合シ変ヘル。

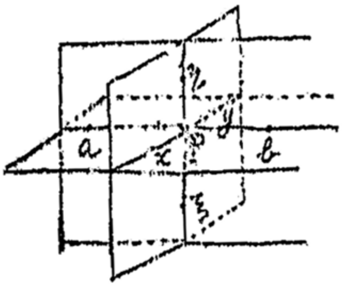


此ノ Umschaltung デ結局 einfech zusammenhängend デ Singularitätenfrei ニ出来ル。

次ニ Singuläre Linie ガ geschlossen デアルガ自ラ交ハラナイ限リ dreifacher Punkt ノナイトキハ前ノ Umschaltung ニテ singularitätenfrei ニナシ得ル。

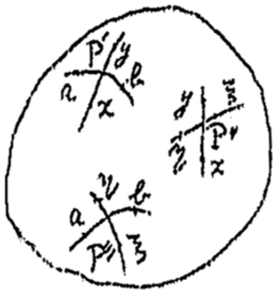
dreifacher Punkt ノアル geschlossene Doppellinie ノ場合ノ Dehn ノ証明ハ不備デアル。ソコデ Johansson ノ試ミノウチ必要ナ部分ダケヲ紹介スル。

dreifacher Punkt P ノ近傍デ doppellinie ノ上ニ六個ノ〟Nachbarpunkte $a, b, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \zeta$ ヲトル。是ヲE^2デハ圖ノ如クナッテ居ル。



E'^2

E^2

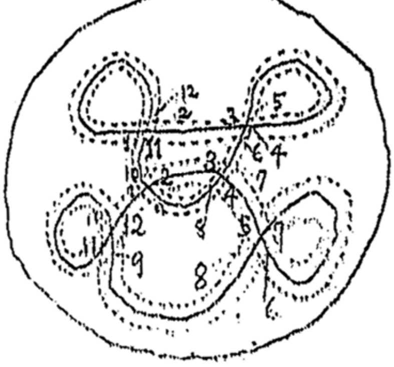


dreifacher Punkt Nachbarpunkte トノ関係ヲ E^2 上デ表シタ Diagramm ガ次ノ條件ヲ充ストキ Dehn-Diagramm ト云フ. Die Schnittpunkte des Diagramms müssen derart in Gruppen von je drei zerfallen, dass ihre zwölf Nachbarpunkte nach dem folgenden Schema zu je zwei gleich bezeichnet sind:

A	Schnittpunkt	von	Strecken	ab	und	cd
B	"	"	"	cd	"	ef
C	"	"	"	ef	"	ab

Dreifacher Punkt ガ Singularitätenbehaftete Elementarfläche デ realisieren スルトキノ必要條件デアル. 扨テ E^2 上 Nachbarkurven ヲ引キ Spurkurven トノ交点 Nachbarpunkte. 是ヲ次ノ如

然ニ Klasse ニ分ケル.



α). Nachbarpunkte, die auf derselben Nachbarkurve liegen, werden zusammengefasst.

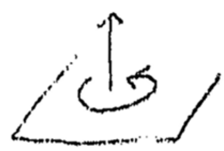
β). Gleichbezeichnete Nachbarpunkte werden zusammengefasst

γ). Wenn a mit b und b mit c zusammengefasst sind, dann Bird auch a mit c zusammengefasst.

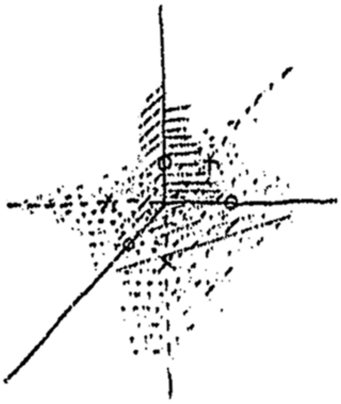
上ノ圖デハ二ツノ Klas

前ノ図デハ二ツノ Klasse ニ分ケラレ [1, 4, 5, 8, 9, 12], [2, 3, 6, 7, 10, 11] トナル.
Klasseneinteilung ヲ使ヒ Dehn-Diagramm ノ Realisierbarkeit ノ Kriterium ガ次
如ク言ヘル. Für die Realisierbarkeit eines Dehn-Diagramms ist notwendig
und hinreichend, dass entgegengesetzte Nachbarpunkte niemals zur
selben Klasse gehören. E'^2 上ノ閉曲線ハ homotop 0 デアルカラ
ニ沿ヒ E' Indikatrix 不変ト言フ事カラ証明出来ル. 　　証明略.

以上 Johansson ノ結果ハ E'^2 上デ Dehn-Diagramm ノ性質ヲ求メタ事ニナル
今 E'^2 ニ realisieren サレタ状態ヲ調ベテ見ル. Nachbarpunkte ノ Johansson
Klasseneinteilung ハ必ズシモ二ツノ Klasse ノミニ分レルトハ限ラナイ. 然
是ヲ E'^2 上デ考ヘルト常ニ二ツノ Klasse ニナル 何トナレバ E'^2 ハ homotop
0 デアルカラ常ニ orientierbar. 然レソノ中ノ閉曲線ニ沿フ空間部分ハ nicht-
orientierbar デアリ得ル. 今 E'^2 ヲ orientierte Flächenkomplex ニスル. ソ
各点デソノ Orientierung ニ一定関係ノ Vektor ヲ立テル. ソレ故 E'^2 ノ一閉曲線ニ
沿ヒ元ニ戻レバ Indikatrix umkehren シテモ E'^2 ノ曲面部分ニ沿ヒ元ニ戻レバ
即チ E'^2 上ノ曲線ニ沿ヒ元ニ戻ル事ニ相当スル) 必ズ Indikatrix erhalten ヲ
知ル. 此ノ Vektor ノ方向ト, ソノ逆ノ方向トノ二ツニ分ケ
レバ凡ベテノ Nachbarpunkte ハ二ツノ Klasse ニ分ケラレ

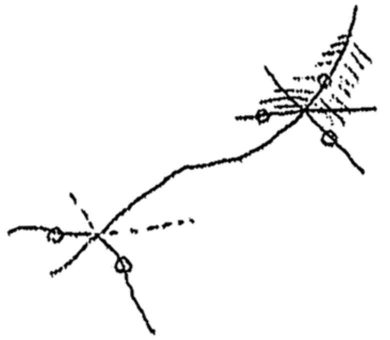


シ 今各 dreifacher Punkt デ六ツノ Nachbarpunkte ヲ
Klasseneinteilung シテ置イテ其処デ次ノ如キ規則ニ従ッテ Umschaltung ヲ行
dreifacher Punkt ノ近傍ハ八ツノ象限ニ分タル. ソノウチ二個ハソノ三本
軸上ノ Nachbarpunkte ハ同ジ Klasse ノモノデアル. ソノ三ツノ Blätter ヲ
ツニツナグ. 残リノ各 Blätter ヲ夫々 Doppellinie ニ沿ヒ繋ギ合セル.

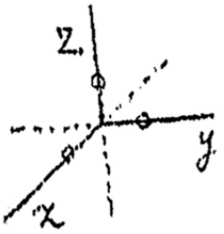


○トメトデ Klasse ヲ示ス。Umschaltung ハ見ニヨリ dreifacher Punkt ハ三重ニ数ヘラル。Doppellinie ハ二重ニ数ヘラレル。

一ツノ Dreifacher Punkt カラ次ノ dreifacher Punkt ニ到ルトキ Klasseneinteilung der Nachbarpunkte ハ圏ノ如クナッテ居ル筈ダカラ此処ノ Umschaltung 規則ハ常ニ凡テニ適用スル事ガ出来ル。



尚此ノ際此ノ Umschaltung デ出来ル singularitätenfreie Fläche ハ Orientierbar デアル事ヲ証明スル。



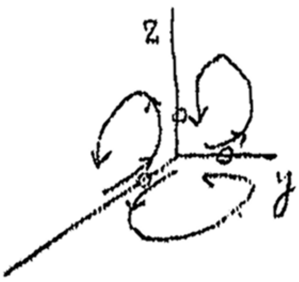
図ノ如キ Klasseneinteilung デアッタトスレバ E^2 ノ Orientierung, 従ッテ E^2 ノ Orientierung ハ

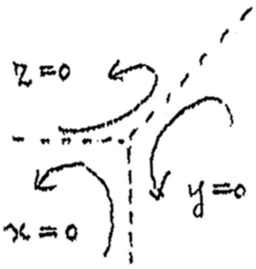
$z=0$ デハ x ノ正ノ方向カラ y ノ正ノ方向ヘノ回転

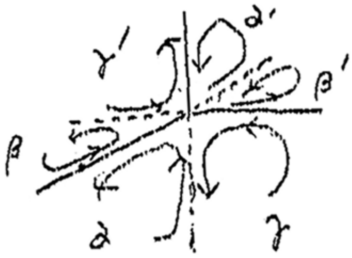
$y=0$ 〃 z ―――― x ―――― 〃

$x=0$ 〃 y ―――― z ―――― 〃

其処デ此ノ Orientierung ヲ図示シ結合スル Blätter ノソレヲ比較スレバ







α,α' Blatt ハ $y=0$ 平面,
β,β' Blatt ハ $z=0$ 平面,
γ,γ' ハ $x=0$ 平面,

扨テ此ノ Singularitätenfreie Fläche ガ zusammenhangend デナイトルナラバ一ツノ閉曲面ガ切スル少クモ一本ノ Doppellinie ハ（現在デハ切スルニ沿ヒ他ノ曲面ガ接スル、一ツノ閉曲面ニ対シテ唯一ツノ Doppelstrecke（三）点カラ次ノ三重点マデノ間ノ）ヲ截リ Umschaltung ヲ行フ、尚未ダ凡テガ zusammenhängend ニナラナイナラ離レテ居ル一ツノ曲面ヲトリソノ一本ノ Doppelstrecke ニツギ Umschaltung ヲ行フ、之ヲ続ケテ結局皆 zusammenhangend ナル 此ノ場合ハ Orientierbare Fläche ノ結合デアルカラ矢張リ Orientierbar ノ曲面デアル、

扨テ此ノ曲面ニテ Triangulation ヲ考ヘおいれる指標ヲ計算スルト元ノ E'^2 ノ Triangulation ニテ dreifacher Punkt ヲ 3倍、Doppellinie ノ2倍ニ勘定シタモノニ等シ、所ガ是ハ即チ E^2 ノ Eulersche Charakteristik デアッテ $\chi(E^2)=1$.

出来上ッタ曲面ノベッチ数 p^0, p^1, p^2 トスレバ Rand ガアルカラ $p^2=0$, zusammenhangend デアルカラ $p^0=1$

$$\therefore \quad 1=p^0-p^1+p^2=1-p^1.$$

即チ此ノ曲面ハ Orientierbar デ einfach zusammenhangend デアル
此ノ Dehnsches Lemma ヲ使ヘバ H. Kneser ノ所謂 Überraschendes etc ガ証明出来ル、 （9 10, 12 ）