44. 函数ノ多葉性ニツイテ

尾崎繁雄（東京文理大）

最初ニ多葉性ノ判定條件ニツイテ，次ニ市原氏ノ論説（13号38）ヲ讀ンデ気ノ付イタ事ヲ述ベテ見タイト思ヒマス。

扠テ角点尖点ヲモタヌ様ナ正則曲線 Λ ニヨリ囲マレタ単一連結閉範囲ヲ D トスル。$f(z)$ ハ D 内デ正則デ，Λ 上ノ z ニ対シテハ $f'(z) \neq 0$ トスル。

1° シカルトキハ，$f(z)$ ガ D 内デ k 葉デアルトスレバ，z ガ Λ 上ヲ一周スル場合ノ $\mathrm{amp}\, df(z)$ ノ全変動（total variation）ハ明カニ少クトモ $2k\pi$ デアル。

2° 故ニ Λ 上ニ於ケル $\mathrm{amp}\, df(z)$ ノ全変動ガ $2(k+1)\pi$ ヨリ小ナル場合，即チ

$$\int_{\Lambda} |d\,\mathrm{amp}\, df(z)| < 2(k+1)\pi$$

ナル場合ハ，$f(z)$ ハ D 内デ高々 k 葉デアル。

3° 從ッテ D ガ凸範囲デアル場合ニハ，Λ 上ノ z ニ対シテ

$$\left|\frac{d\,\mathrm{amp}\, df(z)}{d\,\mathrm{amp}\, dz}\right| < k+1$$

ナル関係ガアレバ，$f(z)$ ハ D 内デ高々 k 葉デアル。

是等ノ事柄ヲ用ヒテ次ノ定理ガ得ラレル

<u>定理 1.</u>　$f(z)$ ヲ $|z| \leqq 1$ ニ於テ正則トスル。

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 + \Re \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| d\theta < 2(k+1)\pi \quad , \quad (z = e^{i\theta})$$

ナル関係ガアレバ，$f(z)$ ハ $|z| \leqq 1$ デ高々 k 葉デアル。

証明。 $f'(z)=Re^{i\Theta}$, $z=e^{i\theta}$ トシタケバ

$$\frac{d\,\mathrm{amp}\,df(z)}{d\,\mathrm{amp}\,dz}=\frac{d\,\mathrm{amp}\,dz+d\,\mathrm{amp}\,f'(z)}{d\,\mathrm{amp}\,dz}=1+\frac{d\Theta}{d\theta}$$

$$=1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

故ニ $|z|=1$ ニ於ケル $\mathrm{amp}\,df(z)$ ノ全変動ガ次ノ様ニ表ハスコトガデキル。

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{d\,\mathrm{amp}\,df(z)}{d\,\mathrm{amp}\,dz}\right|d\,\mathrm{amp}\,dz=\int_0^{2\pi}\left|1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|d\theta<2(k+1)\pi$$

故ニ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ高々 k 葉デアル。

次ノ系ハ容易ニ得ラレル。

系1。 $f(z)$ヲ $|z|\leqq 1$ ニ於ケル正則函数トスル。 $|z|=1$ デ

$$\left|1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|<k+1$$

ナラバ, $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ高々 k 葉デアル。

コノ系ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ得ル。

定理2。 $f(z)=z^k+a_{k+1}z^{k+1}+a_{k+2}z^{k+2}+\cdots$ (k正整数) ノ係数間ニ

$$k(p-k+1)\geqq\sum_{n=k+1}^{\infty}n(n+p-1)|a_n|r^{n-k}\qquad(k\leqq p)$$

ナル関係ガアレバ, $f(z)$ ハ $|z|<r$ デ正則且高々 p 葉デアル。

証明。 $f(z)$ ノ $|z|<r$ ニ於ケル正則性ハ, 仮定ノ不等式ヲ用ヒテ収斂半径ヲ計算スレバ容易ニ得ラレル。次ニ $|z|<r$ ニ於テハ

$$p+1-\left|1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|\geqq p+1-1-\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|$$

$$> p - \frac{k(k-1)+\sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)|a_n| r^{n-k}}{k-\sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-k}}$$

$$= \frac{k(p-k+1)-\sum_{n=k+1}^{\infty} n(n+p-1)|a_n| r^{n-k}}{k-\sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-k}} \geqq 0.$$

故ニ $f(z)$ ハ $|z|<r$ デ正則且單葉デアル。

コノ定理ニ於テ $k=1$ トナセバ市原氏ノ定理（数学輯報10巻75頁定理2）ト類似ナ次ノ系ヲ得ル。

系2。 $\varphi(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$

ノ係数間ニ
$$p \geqq \sum_{n=2}^{\infty} n(n+p-1)|a_n| r^{n-1}$$

ナル関係ガアレバ，$\varphi(z)$ ハ $|z|<r$ デ正則且高々 p 葉デアル。

注意1. 系2ニ於テ $p=1$ ノ場合ハ古クカラ知ラレタ結果デアッテコノトキ $\varphi(z)$ ハ $|z|<r$ ヲ凸範囲ニ描寫スル。

注意2。 定理2ニ於テ $k=p$ ノ場合ニハ $f(z)$ ノ係数間ニ
$$p \geqq \sum_{n=p+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-p}$$

ナル関係ガアルトキ $f(z)$ ハ $|z|<r$ デ p 葉デアル（拙論，東京文理大紀要 A, 2, 1934, 49p. 定理10）コノ條件ノ方ガ幾分精密デアル。

本紙13号38ニ於テ市原氏ハ面積定理ヲ拡張シテヲラレル。ソノ証明方法ハ知ラナイ。シカシ幾分一般的ナ次ノ結果ハ成立スル。

定理3　$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$　（k正整数，$a_{-k}\neq 0$）

ヲ $0<|z|<1$ ニ於ケル正則 k 葉函数トスレバ，係数間ニ

$$\sum_{n=-k}^{\infty} n|a_n|^2 \leqq 0$$

ナル関係ガアル。

シカシ $a_{-k}=0$ ナル場合ニハ係数間ニドンナ関係ガアルカワカラナイ。市原氏ノ問題ガコノ場合ノ解答ヲ求メテヰルノデアレバココニ述ベル事ハ無意味トナル。

初証明デアルガ $f(z)$ ハ $z=0$ ガ k 次ノ極点デアルカラ，z ガ単位円周上ヲ正方向ニ一周スレバ，$f(z)$ ハ ∞ ヲトリマイテ正方向ニ k 周スル様ナ曲線 L ヲ画ク。シカモ $f(z)$ ハ仮定ニヨリ k 葉デアルカラ L ニヨリ囲マレル ∞ ヲ含マザル部分ノ面積ハ確カニ負ニナル。従ッテ面積定理ノ証明ト同様ニシテ上ノ結果ガ証明デキル。

正誤　Algebroid function ニ就テ（6号）一吉田耕作。

6号4頁14行　$f(x,a_{\alpha_\rho}), f(x,a_{\alpha_{\rho+1}}), \dots, f(x,a_{\alpha_\nu})$ ノ中ノ一ツヲ除イテ何レノ $f(x,a_{\alpha_i})$ モ $f(x,a_{\alpha_1}), \dots, f(x,a_{\alpha_{\rho-1}})$ ト一次独立デアル。トシタノハ誤リデシタ。

$f(x,a_{\alpha_1}), f(x,a_{\alpha_2}), \dots, f(x,a_{\alpha_{\nu+1}})$ 数ノ中カラ適当ニ $\rho-1=\nu-\lambda$ コヲエラベバ（但シ其中ニ $f(x,a_{\alpha_1})$ ヲ含マセテヨイ）

$f(x, a_{\alpha_i})$, $i=1, 2, \cdots, k$ カラ之等ノ $\nu-\lambda$ コヲノゾイタノコリノ $f(x, a_{\alpha_i})$ ハイツデモ之等 $\nu-\lambda$ コノ $f(x, a_{\alpha_j})$ ノ系ト一次独立ニナル。但シ高々 λ コノ $f(x, a_{\alpha_i})$ ハ除カナケレバナラヌカモシレナイ。——之ダケノコトシカ云ヘマセン。従ツテ以下ノ所論ハダメデス。

デスカラ最後ノ注意ニ述ベタ如キ定理（Cartan ノ定理ノ拡張？）ダケハ云ヘル訳デス。即チ

一次独立ナ整函数 $g_1, g_2, \cdots, g_\rho$ ノ linear combination $F_1, F_2, \cdots, F_q$ ガ，

$F_{\alpha_\rho}, F_{\alpha_{\rho+1}}, \cdots, F_{\alpha_q}$ ノ内ノ λ コヲノゾイタ何レノ F_{α_i} モ $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \cdots, F_{\alpha_{\rho-1}}$ ナル系ト一次独立デアル

ヲ満足スレバ

$$\left((q-\nu-1)\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)-\frac{\lambda}{\nu}\right)T(r) \leq \sum_{i=1}^{q} N_{\nu-\lambda}(r, F_i=0) + S(r)$$

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_i \log|g_i(x)|\, d\theta \quad (x=re^{i\theta})$$

Algebroid ノ場合デスト 6号 5頁 (7) ノ代リニ，上ノ linear independency カラ，6号ト同様ニシテ

$$\sum_{2}^{\lambda+1} Q(i) + \sum_{p+1}^{q-1} Q(i) \leq \sum_{i=1}^{q} N(r, a_i) + S(r)$$

$$Q(i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(x, a_{\alpha_i})|\, d\theta$$

ハイヘマス。（Algebroid function ニ就テ，10号参照）

従ッテ
$$\sum_{i=2}^{s+1}\alpha(i) \geqq -\lambda T(r) + S(r)$$
ガ云ヘレバ10号ノ結果ハ成立シマス。之ハ非常ニ難シイ問題デ
$p=2$ノ場合ニハ直グ云ヘマスガ一般ノ場合ニハ一寸云ヘマセン。$g(z)$
ガ全テ finite order ノ時ニハ Wiman ノ予想 (~~Valiron: lectures on the general theory of integral functions p.~~

finite or infinite order ノ integral function $f(z)$ ニツイテ, $\log r$ ノ total variation ガ finite ナル如キ $|z|=r$ ノ値ヲノゾイテ
$$\log|f(z)| \geqq -(1+\varepsilon)\log M(|z|)$$
ガ成立スル。

ガ正シケレバ $\sum_{i=2}^{s+1}\alpha(i) \geqq -\lambda(1+\varepsilon)T(r) + S(r)$
ハ云ヘマス。併シ Wiman ノ予想ハ最近ノ Beurling ノ paper (紙上談話会9号ニ抄紹介アリ)ニモ未ダ完全ニトケテヲラナイノデ結局6, 10号ニ於ケル推論ハ誤~~リデ~~抹殺スベキデス。