全國紙上數學談話會 第20号

59 函数ノ多葉性ニ就テ

尾崎繁雄(東京文理大)

$f(z)$ ヲ $|z| \leqq 1$ ニ於ケル正則 p 葉函数トスル。シカモ $|z|=1$ 上デ

$$\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \qquad 或ハ \qquad 1 + \Re \frac{zf''(z)}{f'(z)} > 0$$

ガ成立スル場合ニ $f(z)$ ハ $|z| \leqq 1$ デ星型ナリ或ハ凸型ナリト呼ブコトニスル。コノ定義ハ $p=1$ ノ場合ノソレト矛盾シナイコトハ明カデアル。尚、是等ノ幾何學的意味モ明カデアロウ。

以上ノ定義ニヨツテ單葉星型函数或ハ單葉凸型函数ノ理論夫々 p 葉星型函数或ハ p 葉凸型函数ノ場合ニ拡張デキル。例ヘバ

定理 1 $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots + a_n z^n + \cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル有理型函数トスル。$f(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナルタメノ完全條件ハ $|z|<1$ ニ於テ $\Re \dfrac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ ナルコトデアル。

証明. 上ノ條件ガ十分ナルコトハ明カデアル。(拙論, 東京文理大紀要 A 2 (1934) 49頁定理9'參照) 次ニ必要ナコトヲ述ベル。$|z|<1$ デ $f(z)$ ハ正則且 $\dfrac{f(z)}{z^p} \neq 0$ デアルカラ $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ ハ $|z|<1$ デ正則トナル。シカモ $r(<1)$ ヲ十分 1 ニ近クトツタ場合ニ $f(z)$ ノ星型性ヨリ $|z|=r$ ノ上デ $\Re \dfrac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ デアルカラ結局 $|z|<1$ デ $\Re \dfrac{zf'(z)}{f(z)} > 0$ トナル。

定理 2 $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots + a_n z^n + \cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル有理型函数トスル。$f(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉凸型ナルタメノ完全條件ハ $|z|<1$ ニ於テ $1 + \Re \dfrac{zf''(z)}{f'(z)} > 0$ ナルコトデアル。

証明. $g(z) = zf'(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナルタメ

ノ完全條件ヲ求ムレバヨシ．即チ定理１ヨリ上式ヲ得ル．

以上ノ二定理ハ $p=1$ ノ場合ハ已ニ小堀氏ニヨリ証明サレテヰルノデアルガ唯 $f(z)$ ニツイテノ假定ヲ幾分一般的ニシテアル。

扨 $\varphi(z)=z^p+c_1z^{k+p}+\cdots+c_nz^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナル場合ニハ

$$f(\zeta)=[\varphi(z)]^{\frac{k}{p}}=\zeta+d_2\zeta^2+\cdots+d_n\zeta^n+\cdots \quad (但\ \zeta=z^k)$$

ハ $|\zeta|<1$ デ正則且単葉星型トナル。コノコトハ

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{z\varphi'(z)}{p\varphi(z)}$$

ヨリ容易ニワカルコトデアル。

コノ性質ヲ利用シテ次ノ結果ガ得ラレル。

定理３　$\varphi(z)=z^p+c_1z^{k+p}+\cdots+c_nz^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ ノ正則且 p 葉星型ナル場合ニハ $|c_n|\leqq\binom{\frac{2p}{k}+n-1}{n}$ $(n=1,2,\ \ )$ ナリ

等号ハ $\varphi_0(z)=\dfrac{z^p}{(1-z^k)^{\frac{2p}{k}}}$ ノ際起ル。

定理４　$\varphi(z)=z^p+c_1z^{k+p}+\cdots+c_nz^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉凸型ナル場合ニハ $|c_n|\leqq\frac{p}{nk+p}\binom{\frac{2p}{k}+n-1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ ナリ

等号ハ $\phi_0(z)=\displaystyle\int_0^z\frac{z^{p-1}}{(1-z^k)^{\frac{2p}{k}}}dz$ ノ際起ル。

特ニ $p=1$ ノ場合ハ Golusin 及ビ能代氏ニ依テ証明サレテ居リ，上ノ証明モ亦能代氏ノソレニ倣ツテ行フコトガ出来ル。（能代氏 北海道帝大紀要 2 (1934), 131頁参照）

其他定理３或ハ４ノ假定ノ下ニ $\varphi(z)$ ノ Polynomial section ノ星型半径，凸型半径ヲ決定スル理論等モ全ク類似ニ進ミ得ルデアロウ。

（11月20日受取）