71. 星型描寫ニ就テ

鍋谷堅次郎（東北大）

§1. $w=f(z)$ ヲ單位円 $|z|<1$ ニ於テ正則デ、ソレヲ一ツノ凸領域ニ等角ニ描寫スル函數トシマス。E. Study 氏ニヨリ、任意ノ r $(0<r<1)$ ニ對シテ $|z|<r$ ナル領域モ亦、$w=f(z)$ ニヨリ一ツノ凸領域ニ描寫サレルコトが知ラレテ居マスガ、コレニ對シテ T. Rado 氏（Math. Ann., 102, 1930）ハ一ツノ hübsch ナ證明法ヲ與ヘマシタ。コノ方法ニヨルト次ノ樣ナ事實モ容易ニ證明サレルコトハ W. Seidel 氏並ビニ高橋進一君ガ指摘サレマシタ。 即チ、$w=f(z)$ ヲ單位円内 $|z|<1$ ニ於テ正則デ、簡單ノタメニ $f(0)=0$ ト假定シテ單位円 $|z|<1$ ヲ w－平面ニ於ケル原点ニ關スル一ツノ星型領域ニ等角ニ描寫スル函數トシマス。然ルトキハ、任意ノ r $(0<r<1)$ ニ對シテ $|z|<r$ モ亦 w－平面ニ於ケル原点ニ關スル一ツノ星型領域ニ描寫サレマス。 Study ノ定理ト呼バレテ居ル上ノ事實ハ元ハ Carathéodory ト Blaschke ノ共著、Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Geometrie, I, p. 109 カラ出テ居ルノデスガ、之レニ對スル文献トシテハ古クハ Carathéodory ノ Über die Studysche Rundungsschranke（Math. Ann., 79, 1919, p. ）

ガアリ、最近デハ Carathéodory ノ指導ヲ受ケタ Ernst Peschl ノ学位論文（Math. Ann., 106, 1932, p.　）ガアリマス。私ハコノ Peschl ノ研究ニ刺戟サレテ上述ノ Rado 氏ノ論文ヲ発展サセタ、サゝヤカナ一研究ヲナスコトガ出来タノデスガ、ソノ要点ヲ次ニ述ベテミタイト思ヒマス。私ニハ未完成ト考ヘラレマスガ、忙シサニマギレテ、労ヲイトハヌ積リデハアリマスガ其後久シク再ビ筆ヲ取ル機会ノナイノヲ残念ニ思ッテ居マス。

§2. 初メニ一ツ定義ヲ与ヘマス。無限遠点ヲ含マヌ一ツノ単一連結ノ領域ガソノ有限遠ニアル境界上ノ一定点ニ関シテ、ソノ点トソノ領域内ノ任意ノ一点トヲ結ブ線分上ノ点ヲ総テ含ム場合ニハ、ソノ領域ノコトヲソノ境界上ノ一点ニ関シテ星型デアルト云フコトニシマス。ソコデ次ノ様ナ定理ガ成立シマス。

定理　$f(z)$ ヲ単位円内 $|z|<1$ ニ於テ正則且ツ単葉デアルトシ、$w=f(z)$ ニヨリ $|z|<1$ ガ描寫サレテ出来ル w－平面ニ於ケル領域 D ヲソノ境界上ノ一点 w_1 ニ関シテ星型デアルトシマス。w_1 ニ於ケルコノ領域ノ内部ヘノ一ツノ cut ニ對シテ z－平面デハ単位円 $|z|=1$ 上ノ一点デ終ル矢張リ一ツノ cut ガ對應シマス。此ノ cut ノ end-point ハ簡単ノタメニ $z=1$ ト仮定シテモ支障アリマセン。然ルトキハ単位円ニ含マレ $z=1$ ニ於テソノ内部カラ接スル任意ノ

円ノ内部モ亦 w_1 ニ関スルーツノ星型領域ニ描寫サレマス。

此ノ定理ヲ証明スルノニ、w_1 ニ於テ D ノ任意ノ一点 $f(z)$ ト w_1 ヲ結ブ線分カラナルーツノ cut γ_w ヲ作リマス。コノ cut ニ對應シテ $|z|<1$ デモーツノ cut γ_z ガキマリマスガ、ソノ end-point ヲ簡單ノタメニ $z=1$ トシテオキマス。t ヲ區間 $0<t<1$ ノ任意ノ定マッター点トシマスト γ_w 上ノ $tf(z)+(1-t)w_1$ ニハ γ_z 上ノ $z_1=f^{-1}(tf(z)+(1-t)w_1)$ ガ對應シマス。次ニ γ_w 上ノ $tf(z_1)+(1-t)w_1=t\{tf(z)+(1-t)w_1\}+(1-t)w_1=t^2f(z)+(1-t^2)w_1$ ニハ γ_z 上ノ $z_2=f^{-1}(tf(z_1)+(1-t)w_1)=f^{-1}(t^2f(z)+(1-t^2)w_1)$ ガ對應シマス。

γ_w 上ノ $tf(z_2)+(1-t)w_1=t\{tf(z_1)+(1-t)w_1\}+(1-t)w_1$
$=t^2f(z_1)+(1-t^2)w_1=t^2\{tf(z)+(1-t)w_1\}+(1-t^2)w_1$
$=t^3f(z)+(1-t^3)w_1$ ニハ γ_z 上ノ $z_3=f^{-1}(tf(z_2)+(1-t)w_1)$
$=f^{-1}(t^3f(z)+(1-t^2)w_1)$ ガ對應シマス。以下ハ同様ニシテ順ニ進ムコトガ出來マス。ソコデ若シ N ノ十分大キイ或整數ノ値ヨリ大キイ総テノ整數 n ニ對シテ

$$\frac{1-|f^{-1}(tf(z_{n-1})+(1-t)w_1)|}{1-|z_{n-1}|}=\frac{1-|z_n|}{1-|z_{n-1}|}>1$$

デアルトシマスト、$n>N$ ニ對シテ

$$1-|z_n|>1-|z_N|$$

トナリマス。一方 $f(z_n)=t^nf(z)+(1-t^n)w_1$ デスカラ

$n \to \infty$ ノトキ

$$f(z_n) \longrightarrow w_1$$

トナリマス。故ニ $n \to \infty$ ノトキ

$$z_n \longrightarrow 1$$

トナリ、コヽニ一ツノ矛盾ガ得ラレマシタ。從ツテ $\{n\}$ ノ適當ノ sub-sequence $\{n_p\}$ ニ對シテ

$$\frac{1-|f^{-1}(tf(z_{n_p})+(1-t)w_1)|}{1-|z_{n_p}|} \leqq 1$$

トナル樣ナ $\{n_p\}$ ガアリマス。コノ結果ニヨリ我々ハ Schwarz ノ Lanma ヲ擴張シタ Julia-Carathérdory ノ定理ヲ函數 $f^{-1}(tf(z)+(1-t)w_1)$ ニ適用スルコトガ出來マス。

$$\lim_{n_p \to \infty} \frac{1-|f^{-1}(tf(z_{n_p})+(1-t)w_1|}{1-|z_{n_p}|} = \alpha \leqq 1$$

デアリマスカラ、z ガ單位円ニ含マレ $z=1$ ニ於テ、ソレニ内部カラ切スル任意ノ定マツターツノ円内ニアルトキハ、$f^{-1}(tf(z)+(1-t)w_1)$ モコノ円ノ内部ニアルコトガ言ヘマス。言ヒカヘルト z ガ上述ノ樣ナ円内ノ点デアルト $tf(z)+(1-t)w_1$ ハ $w=f(z)$ ニヨリ上述ノ円ニ對應スル w－平面上ノ領域ノ点トナリマス。t ハ區間 $0<t<1$ ノ任意ノ点デアリマスカラ、我々ノ定理ハ証明サレマシタ。函數 $w=f(z)$ ハ此ノ定理ノ條件ニ叶フ具体的ノ例ガ、ソノ星型

ノ頂点ハ $w=-\frac{1}{4}$ デス。

上ノ定理ノ他ニ未ダ二三ノ定理ガアルノデスガ一例トシテソノ中ノ一ツヲ列ベマス。

定理 $f(z)$ ヲ單位円内 $|z|<1$ デ正則且ツ單葉デ、z ノ real ノ値ニ對シテ real ノ値ヲ取リ、$|z|<1$、$\mathfrak{I}\{z\}>0$ ナル領域ヲ w—平面ニ於ケル一ツノ凸領域ニ等角ニ描寫スル函數トシマス。然ルトキハ z—平面ニ於ケル実軸ト $+1$ 及ビ -1 ヲ通ル任意ノ円ノ弧ニヨリカコマレ $|z|<1$ ニ含マレル領域モ亦一ツノ凸領域ニ描寫サレマス。

此ノ定理モ前ト同様ノ方針デ矢張リ一種ノ Schwarz ノ Lemma ノ擴張ヲ用ヒテ証明サレルノデスガ、ソノ Lemma 及ビ上述ノ Julia-Carathéodory ノ定理ニ就テハ Carathéodory: Conformal Representation (Cambridge Tracts. No. 28) ヲ參照シテ下サイ。

§3. 此ノ前ノ「單葉函數ニ就テ」ニ二三ノ補足ヲシタイト思ヒマス。

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots\cdots$$

ヲ單位円内デ正則デ

$$f'(z)\neq 0$$

デアルトシマスト $|z|=r\ (0<r<1)$ ニ對應スル w—平面上ノ曲線 C_r 上ノ z ニ對應スル一点ニ於ケルコノ曲線ノ曲率

ハ

$$\frac{R\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}}{|f'|}$$

デ與ヘラレマス。故ニC_r上ノ曲率ガ0トナル点、即チ変曲点ハ

$$R\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}=0 \qquad |z|=r$$

或ハ

$$amp\left\{1+\frac{zf''}{f'}\right\}=\frac{\pi}{2} \qquad |z|=r$$

ニヨリ定マリマス。故ニ此ノ前述ベタ頂点ノ数ニ関スル松垣君ノ十分條件ト同様ニシテ任意ノrニ對シテC_r上ノ変曲点ノ数ガ高々ニツデアルタメノ十分條件トシテC_rガ卵形線デアルトイフ性質ヲ取ルコトガ出来マス。コレヲ函数$f(z)$ニ對スル條件デ表ハスナラバ

$$R\left\{1+\frac{z\frac{d^2}{dz^2}\left(1+\frac{zf''}{f'}\right)}{\frac{d}{dz}\left(1+\frac{zf''}{f'}\right)}\right\}>0$$

トナリマス。ココニ注意スベキコトハrガ十分小サイトキハ変曲点ガ全然ナイト云フコトデス。

次ニ単葉函数論デハ

$$\frac{d\, amp\, f(z)}{d\, amp\, z}=R\left(\frac{zf'}{f}\right)$$

ナル函数ガ重要ナ意義ヲ持ッテ居マスガ、之ヲ角速度ト假ニ呼ブコトニスレバ

$$\frac{d^2(\mathrm{amp}\, f(z))}{d(\mathrm{amp}\, z)^2} = \mathfrak{I}\left\{\frac{zf'}{f}\left(1+\frac{zf''}{f'}-\frac{zf'}{f}\right)\right\}$$

ヲ角加速度ト呼ブコトガ出來マス。コノ樣ナ Quantity ニ就テモ研究スベキ問題ガナイデセウカ。又檜垣君ガ注意セラレタ樣ニ

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots\cdots$$

ガ $|z|<1$ デ正則デ

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0, \qquad f'(z) \neq 0$$

ナル條件ヲ滿足スルトキ、$|z|=r\ (0<r<1)$ ニ對應スル w ―平面ニ於ケル曲線 C_r ト原点カラ出ル Radius-Vector ノ交点ニ於ケル C_r ノ法線トソノ Radius-vector ノナス角ガ最大ニナル点デハ

$$\mathfrak{R}\left\{1+\frac{zf''}{f'}-\frac{zf'}{f}\right\} = 0$$

トナリマス。尚此ノ前述ベマシタ頂点ノ數ガ二ツアルタメノ必要ニシテ且ッ十分ナ條件ニ就テモ共々ニ考究シタイト思ヒマス。研究スベキ問題ハ澤山アルト思ヒマスガ得ラレタ結果ハ機ヲ見テ發表スルコトニ致シマス。

§4. 函數ノ0-点ニ關スル Kleine Bemerkung ヲ述ベテ終ルコトニシマス。

定理. 函數

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ヲ $|z|<1$ デ正則デ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta \leqq M, \quad 0\leqq r<1;\ M>0$$

ナル條件ヲ滿足スルモノトシマス。 $n\geqq 1$ ニ對シテ

$$M\geqq |a_n| > M\left(1-\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right)$$

ナルトキハ $f(z)$ ハ常ニ

$$|z|<\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

ナル領域内ニ丁度 n 個ノ零点ヲ持ツ。コノ限界 $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ ハヨリ大キクスルコトモ、ヨリ小サクスルコトモ出來マセン。

コノ定理ハ代數方程式ノ根ニ關スル、ヨク知ラレタ Pellet ノ定理ヲソノマヽ冪級數ニ擴張シタモノ（Walsch, Anns. of Math., 1928 ?）ニ昭和七年ノ帝國學士院記事ニ於ケル能代君ノ論文ニアル方法ヲ應用シテ得ラレマス。

§5. 本紙上談話會誌上ニ載セテ頂イタ拙文ノ全体デ私ノ只今マデノ研究ノ大体ハ盡サレテ居ルト思ヒマス。今更申シマスノモ可笑シイ位デ御座イマスガ此ノ際學生時代カラ主トシテ御指導ヲ受ケマシタ藤原先生並ニ窪田先生ニ衷心カラ深イ感謝ノ意ヲ捧ゲマス。私ノ研究ニ幾ラカデモ見ルベキモ

ノガ御座イマシタナラバ、ソレハ偏ニ両先生ノ御功績ニ帰スベキデ御座イマス。此ノ弱イ欠点ニ満チタ一個ノ人間ガ今日アル処マデ辿リ来レコトガ出来マシタノハ私ノ両親ハモトヨリ、藤原先生、窪田先生ヲ初メトシテ幼少ノ頃カラノ諸先生方、先輩諸兄、親戚知人及ビ友人並ニ生徒諸子ノ御蔭ニヨルコトヲ思ヒ、心カラノ祈リト感謝ヲ捧ゲマス。又藤原先生、窪田先生並ニ其他ノ諸先生方ニハ将来モ長ク私達ノ上ニ御慈愛ニ充チタ力強イ御指導ノ手ヲ垂レ賜ハランコトヲ幾重ニモ御願ヒ申上ゲマス。

(12・18受取)