

173. Freie Gruppe, 構造, 幾何學的解釋

小松 醇郎 (阪大)

一ツノ集合体ノ性質ヲソノ Fundamentalgruppe, 構造
 カラ特徴ツケ得ル場合ガ少クナイ、二次元ノ曲面ノ場合ハソ
 ノ可符号性、種數 (geschlecht) 等ハ一ツノ例デアル、
 而シテ之ヨリ逆ニ二ツノ freie Gruppen

$$(1) \begin{cases} \text{Erzeugende} & a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^p (a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = E \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \text{Erzeugende} & a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{2p} \\ \text{Relation} & \prod_{i=1}^{2p} a_i \prod_{i=1}^{2p} a_i^{-1} = E \end{cases}$$

ノ isomorph が言へル。

(W. Threlfall: Gruppenbilder 参照)

三次元集合体ノ性質ヲ Gruppe, 構造カラ明ニスルコトハ
 甚ダ複雑ナ問題デアルガ先ツ H. Kneser, 定理ヲ簡單ニ証
 明スル。

此ノ定理ハ H. Kneser が Jahres. der. Dent. Math.
 Verein. Bd. 38 デ試ミタモノデアルガ、ソノ証明ハ當
 時ホダ Vermutung デアツタ Dehn, Lemma ヲ用
 ヒタノミナラズ、ソノ冗長難解ニ至ツテハ天下一品デアル。

定理ソノモノハ然シ私が本紙、數、談、會ノ15号ヲ試ミタ
 Dehnsches Lemma ノ証明ガ正シク又 Kneser ノ証明
 ガ正シケレバ正シカッタ筈ノモノデアアル。今此処デハ全ク
 別ニ Dehnsches Lemma ヲ用ヒズニ証明スル。

Kuroschi ノ Isomorphiesatz (Freie Produkte
 von Gruppen. Math. Ann. Bd. 109) ヲ利用スルガ
 コレガモット簡單ニ出來ルナラ有難イワケデアアル。誤ヲ記シ
 テハ居ナイト思フガ不備ノ点ヲラバ御教示願ヒマス。

定理. 三次元閉集合体ノ Fundamentalgruppe ガニツ
 ノ Untergruppe ノ freies Produkt ニ分タレル
 ナラバ其ノ集合体ハ二次元球面ヲニツニ分タレ、ソノ各
 々ノ Fundamentalgruppen ハ分タレタニツノ
 Untergruppen ニ夫々 isomorph デアル様ニ出
 來ル。

此ノ逆ハ明カデアアレカラ是ガ或意味デ幾何學的性質ヲ特徴付
 ケル。

証明. M^3 ノ種數 p トスレバ、種數 p ノニツノ Vollbrezeln
 Σ_1^3, Σ_2^3 ニ分タレ、夫々ノ導曲面 F_1, F_2 ノ上
 ノ標準切断線

$$\gamma_i', \mu_i' \text{ in } F_1 \text{ 且 } \gamma_i' \text{ homotop } 0 \text{ in } \Sigma_1^3.$$

$$S_i', t_i' \text{ in } F_2 \text{ 且 } t_i' \text{ homotop } 0 \text{ in } \Sigma_2^3.$$

$$(i=1, 2, \dots, p)$$

トシ、 $F_1 \rightarrow F_2$ へ、topologische Abbildung γ

$$(1) \begin{cases} \gamma'_i = \Pi_{\tau_i}(S, t) \\ u'_i = \Pi_{s_i}(S, t) \end{cases}$$

トス。Definierende Relationen der Fundamentalgruppe von M_i^3

$$E = \Pi_{\tau_i}(S, E) \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

ヲ次ノ規則ニ從ツテ Klasse = 余ケル。

一ツノ Relation ノ中ニ Erzeugende s_i, s_k ($i \neq k$) が表ハレル (trivial, Reduktion $s_i s_i^{-1}$ ヲ除イテ) ナラバ s_i 及ビ s_k ヲ Wesentlich = 含ム Relationen ヲ凡ソ一ツノ Klasse = 入レル。

異ル Klasse ノ中ノ Relationen ノ中ニハ決シテ等シイ Erzeugende ハ表ハレナイ。

尚 Relationensystem ; 中ヲ "elementare Transformation" ヲ行ヒ此ノ Klasseneinteilung ヲ出來ルダケ細ク選ス。

斯クテ Erzeugende s_i 及ビ Relationen ; Klasseneinteilung が出來、一ツノ Klasse が一ツノ Untergruppe ヲ定義シ、ソコニ含マレル Erzeugende が Untergruppe ノ Erzeugende ナラシム。

$F_2 =$ 一ツノ Klasse = 表ハレル Erzeugende s_k 凡テ、Henkel ヲ他ノ部分ト切り離ス E_2^2 ヲ考ヘル。 E_2^2 ハ

Σ_2^3 ヲ二分シ E_2^2 ト F_2 トノ交線 S_2 ハ F_2 ヲ二分スル。

$F_1 \rightarrow F_2$ ノ *Abbildung* ハ *topologisch* デアルカラ S_2 ノ F_1 上ノ *Urbild* S_1 ハ F_1 ヲ二分シ夫々 F_2 ノ二分サレタ部分 = *homöomorph* . 従ッテ S_1 ハ F_1 上デ *homolog 0* .

次 = Σ_1^3 ヲ $F(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ノ *stetige Schar* トシ $F(1) = F_1$, $F(0)$ ハ *Ausarten* シタ曲面即チ Σ_1^3 内ノ一点 Q ヲ通ル巾個 (種数) ノ円トスル。即チ Σ_1^3 デ $F(1)$ ガ $F(0) = \text{homotop}$.

$F(1)$ ハ $F(t)$ ($t > 0$) = *homöomorph* デ *topologische Deformation* デ移レル。然ラバ S_1 ハ $S_1(t)$ ナル閉曲線 = 移リ又 $F(t)$ ヲ二分スル。凡テノ t デ二分サレタ各々が *Deformation* デ移ッテ空間部分ハ互 = *separate* サレ兩者ハ併セテ Σ_1^3 ヲ作ル。

而シテ兩者ノ境ハ S_1 ガ *homotop 0* = ナル部分デアアルカラ一ツノ *Elementarfläche* デアル。

但シ $F(0)$ ノ曲線 = 沿ヒ切スル部分が出テ來ルコトモアラウガ S_1 ハ $F(1)$ デ *homolog 0* . 即チ $S_1 = \Pi(\gamma, \mu)$ ト表サレテモ γ ト共 = γ^{-1} , μ ト共 = μ^{-1} ガ必ず表ハレテ居ル。従ッテ S_1 ガ $F(0) =$ 至ルトキ *even number* , *branch of plane* ガ $F(0)$ デ切スルダケダカラツレノ変形デ切點ヲ離レシメ得ル。

又 S_1 が $S_1(0) = \text{ナルトキ点 } Q \text{ヲサケ得ルハ明カデアアル。}$

此、Elementarfläche $\text{ヲ } E_1 \text{ヲ表ハセバ } E_2 \text{ト } E_1 \text{トヲ } S_1 \text{ヲ合セタ } S^2 \text{ハ球面} = \text{homöomorph. 且ツ } M^3 \text{ヲ二分スル。}$
且ツツ、fundamentalgruppe ハ一方ハ始メノーツノ Klasse、Untergruppe = isomorph デアアル。

fundamentalgruppe、任意、freies Produkt = 命ケル Untergruppe \in Kurosch、Isomorphiesatz = ヨレバ、上述、Klasseneinteilung = ヨル Untergruppe、freies Produkt ト isomorph デアアルカラ定理ハ完了。

次 = M^2 が球面デナク種数 p の曲面ヲ二分サレル場合ノ証明ヲ求メル、デアアルガ。此ノ場合 = ハ Kurosch、Satz $\text{ヲ Freie Produkte mit vereinigten Untergruppen}$ ノ場合 = 擴張セネバナラナイ。且ツ vereinigt サレタ Untergruppe ハ Erzeugende $2p$ 個。

$$a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$$

Relationen:
$$\prod_{i=1}^p a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = E$$

ナル最始 = 此シタ freie Gruppe mit Relation ガス。
此、freie Produkt、Gruppe = 對スル Isomorphiesatz ガ少々面倒デアルシ幾何學的ノ性質 = 對應付ケルトキ Heegaard Diagramm ダケデアハ成功シナイノ
 デア行止リノ状態デス。