

175. *Beurling* の定理、応用例

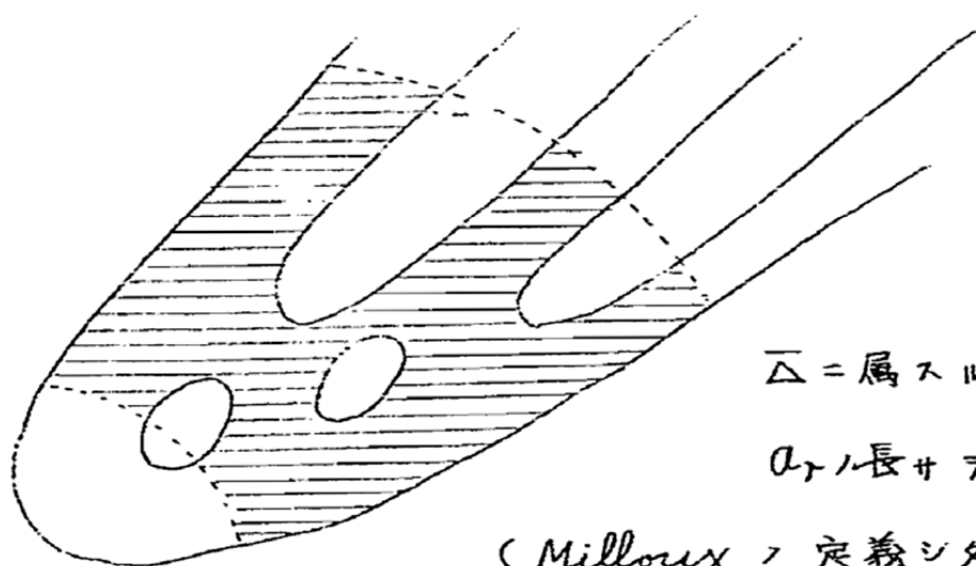
吉田耕作 (阪大)

第九号 = 於テ筆者、紹介シタ *A. Beurling* の *Thèse* が函数論 = 於ケル近來、大収穫ナルコトハ何人モ異存、ナイコトト信ツマス。 *Beurling* が *Denjoy*、豫想ヲ証明シタ方法ヲ殆ソド其ノ儘デ *H. Milloux* の *domaine de détermination infini des fonctions entières* = 關スル結果 (*Acta 61*) が得ラレルコトヲ次ニ示シタイト思ヒマス。後ニ述ベル様 = *Milloux*、結果ヨリ稍一般ニナツテアル様ニ思ヒマス。

有理型函数 $y = f(x)$ の逆函数 $x = g(y)$ 、一ツ、分枝 $x = g_i(y)$ ヲ $|y| > C$ 、内部 = 於テ凡エル方法デ *fortsetzen* スルトキ得ラレル *Wertbereich* (x 平面) ハ單葉 + 連結セル領域ニナリマス。 $f(x)$ ハ Δ 、周上デ $|f(x)| = C$ 、内部デ

$\wedge |f(x)| > C$ ヲ満足シマス。

今 Δ ノ周ノ中ニ ∞ ニノビタモノガ少クトモーツアルト假定シマス。モシ閉テタ周ガアレバ此内部デハ $f(x)$ ハ $|y| < C$ ナル y ノ値ヲ全テ同回數丈トリマス。 Δ ニ斯ル閉テタ周ノ内部ヲモツケ加ヘテ得ル單一連結領域ヲ $\bar{\Delta}$ トシマス。



原点ヲ中心ト
スル円周 $|x|=r$
デ Δ ヲ切ルトキ
此ノ周上ノ点デ

$\bar{\Delta} =$ 属スルモノノ集合ヲ a_r

a_r ノ長サヲ $r\theta(r)$ トシマス

(Millouxノ定義シタ $r\theta(r)$ ヨリ短イ)。

$\bar{\Delta}$ ト $r_0 < |x| < r$ トノ共通集合ヲ $\bar{\Delta}_{r_0 r}$, $\Delta_{r_0 r}$ ノ内部ノ点 x ヲトリ x ガ 0 ニナル様ニ $\bar{\Delta}_{r_0 r}$ ヲ單位円 $|X| < 1 = schlicht =$ 寫シマス。コノトキ a_r ノBildノ長サ

$$\omega(x, a_r, \Delta_{r_0 r})$$

ハBeurlingノ定理(第9号参照)ニヨリ

$$(1) \log \frac{1}{\omega} \geq \frac{\pi (\log \frac{r}{|x|})^2}{\int_{r_0}^r \theta(r) d \log r} - 1$$

借上ノ等角寫像ニヨリ函数 $f(x)$ ハ $F(X) =$ 变换サレマス。

今 $\max_{|x|=r} |f(x)| = M(r)$ トヲケバ, 函数

$$G(X) = \frac{F(X) - \alpha}{M(r_0)}, \quad |\alpha| < C$$

$|x|=1$ 上 $\omega = \alpha$ 於テハ $|G(x)| \leq \frac{M(r) + |\alpha|}{M(r_0)}$, 其以外ノ部分テハ
 $|G(x)| \leq 1 + \frac{|\alpha|}{c}$ ヲ満足スル。ヨツテ $|x| \leq 1$ 及ビ $G(x) = \text{Jensen}$
 ノ公式ヲ apply スレバ (1) = ヨリ次ノ定理が得ラレマス。

$$\log \frac{\log \frac{M(r) + |\alpha|}{M(r_0)}}{\log \frac{|f(x) - \alpha|}{M(r_0)} - \log \left(1 + \frac{|\alpha|}{c}\right) + N(\bar{\Delta}_{r_0, r}; \alpha) - N(\bar{\Delta}_{r_0, r}; \infty)}
 \geq \frac{\pi \left(\log \frac{r}{|x|}\right)^2}{\int_{r_0}^r \theta(r) d \log r} + \log 2\pi - 1$$

但シ $N(\bar{\Delta}_{r_0, r}; \alpha)$ ハ $\bar{\Delta}_{r_0, r}$ = 属スル α -point ノ個數, \log
arithmic integration (X-plane デ積ルシテル)

Milloux ノ結果 (前出) ノ A. Speiser ガ Julia ノ定理ヲ使
 ヲツテ出シタ結果 (Commentarii Helv. I, 1931) 等ガ全テタヤス
 ク上ノ定理カラ得ラレマス。筆者ハ上ノ定理ニ於ケル

$$N(\bar{\Delta}_{r_0, r}; \alpha)$$

ノ如キ量ノシマイ取扱ヒが出来ヌラ Δ ノ内部=アル閉デケ同ノ
 個數=ツイテノ何ラカノ Aussage が出来ルンデヤナイカト思
 ヒマス (Milloux paper デハコウ云フモノハ問題ニシテヲ
 ラナイノデドウヤツタラヨイカ筆者=ハ余ラナイノデスガ)。此
 点御教示ヲ得レバト思ヒマス。尚此他=モ Beurling, Thèse
 カラハ色々ノ結果が得ラレルコトト思ヒマスガ。

————— 0 —————