

86. Function group = 就テ

清水辰次郎, 吉田耕作, 角谷静夫 (阪大)

1) $f(z)$ が全有限平面で *meromorphic function*

トスル。

若シ

$$f(\varphi(z)) = f(z) \quad (1)$$

ヲ満足スルスベテ $\varphi(z) = z + \text{const}$ 対シテ

$$f'(\varphi(z)) = f'(z) \quad (2)$$

ガ成立スレバ

$$f(z) = \frac{\alpha e^{cz} + \beta}{\gamma e^{cz} + \delta}; \quad \alpha, \beta, c, \delta \text{ ハ 常數} \quad (3)$$

トナル。

証明. $\varphi(z)$, *regular point* の近傍で (1) より

$$f'(\varphi(z))\varphi'(z) = f'(z)$$

デアルカラ (2) より

$$\varphi'(z) \equiv 1, \quad \varphi(z) \equiv z + \text{const.}$$

ヲ得ル。

コレヨリ $f(z)$ が *periodic function* ナルコトヲ知ル。

(i) *double-periodic* ナルトキ。

$f(z)$ ハ *period* ノ平行四辺形ノ内デ *schlicht* ナケレバナラヌ。モシサウデナケレバ

$$f(z_1) = f(z_2), \quad z_1 \neq z_2$$

ヲ満足スル z_1, z_2 ガーツノ *period* ノ四辺形内ニ存在スル。 $z_2 = \varphi(z_1)$ ナル如キ $\varphi(z)$ ヲトレバコレハ $\varphi(z) = z + \text{const.}$ ト云フ形ニナレナイ。

トコロガ *period* ノ平行四辺形内デ *schlicht* ナ *double-periodic function* ハ存在シナイ。^{*}

* I. Shimizu: *On the Linear Functions of Automorphism for meromorphic functions*, 東北数学報誌, vol 38, p.223.

(ii) *simple-periodic* ナルトキ。

最小ノ *period* ヲ $\frac{2\pi i}{c}$ トスレバ、コノ時モ前ト同様ニ *period* ノ帯状形ノ中デ $f(z)$ ハ *schlicht* ナケレバナラヌ。スルト

$$f(z) \equiv g(x), \quad x = e^{cz}$$

デ定義サレタ $g(x)$ ハ全平面デ *schlicht* ニナルカラ

$$y(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

Remark.

$$1^\circ \quad f'(z) = g(f(z)), \quad g: \text{一價} \quad (4)$$

ヲ満足スル函数ハ明カニ前節ニ考ヘラレタ性質ヲモツ。

依ツテ (4) ノ solution が meromorphic ナアレバ (3)

ノ如キ形ヲナケレバナラナイ。 (4) ヨリ

$$\int_0^z \frac{f'(z)}{g(f(z))} dz = Z$$

ヲ得ル。コレヨリ

$$\int_{f(0)}^{f(z)} \frac{dx}{g(x)} = Z \quad \begin{array}{l} \text{但シ積分ハ } Z \text{ が } 0 \rightarrow C \text{ ナルトキ} \\ f(z) \text{ が } \rightarrow \text{ゴク道ニ沿フモノトスル。} \end{array}$$

$$\int_{f(0)}^t \frac{dx}{g(x)} = u(t) \quad (5)$$

トオケバ

$$f(z) = u^{-1}(z)$$

即チ積分 (5) ノ逆函数が meromorphic function ナ

アレバ、ソレハ (3) ノ形トナル。

2° 次ニ

$$(f'(z))^2 = g(f(z)) \quad (6)$$

ヲ満足スル函数ヲ考ヘルト

$$(f'(\varphi(z)))^2 = (f'(z))^2$$

$$\text{ヨリ} \quad \varphi(z) = \pm z + \text{const}$$

ト云フ形トナル。コレヨリ $f(z)$ ハ *periodic* (*simple* 又ハ *double*) テ *period* ノ 四辺形又ハ 帯状形 ノ 中テ *two-valent* テアリ。

$$\int_{f(z_0)}^t \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = u_1(t)$$

ノ 逆函数ガ *meromorphic* ナラバ コノ *class* = 属スル。

2) ニツ、全有限平面テ *meromorphic* ナ函数 $f(z), g(z)$ = 関スル *automorphism* ノ *function group* ガ 一致スルタメ = 必要ニシテ十分ナ条件ハ

$$g(z) = \frac{\alpha f(z) + \beta}{\gamma f(z) + \delta}$$

トナルコトデアル。

証明。十分ナコトハ 明カダカラ 必要性ヲ 証明スル。

$$a = f(z), \quad b = g(z)$$

トオケバ a ガ $f(z)$ ノ 除外値デナケレバ

$$z_a = f_i^{-1}(a), \quad f_i^{-1}(z) \text{ ハ } z = a \text{ テ } \left. \begin{array}{l} \text{regular 又ハ} \\ \text{algebraic} \end{array} \right\} (7)$$

ナル $f(z)$ ノ 逆函数ノ ツノ *branch* ガアル。スルト

$$b = g(z_a)$$

ハ f^{-1} ノ *branch* f_i^{-1} ノ 取り方 = ハ *independent*

デアル。此トナレバ

$$f_j^{-1}(a) = \varphi_{ij}(f_i^{-1}(a))$$

トナル φ_{ij} が存在スルカラ

$$g(f_j^{-1}(a)) = g(\varphi_{ij}(f_i^{-1}(a))) = g(f_i^{-1}(a)) = b$$

トナル。ヨツテ $b = b(a)$ ハ a ノ一値函数デアル。ト
 コロガ (7) ヨリ $b(a)$ ハ各点デ *regular* 又ハ *algebraic*
 ナルコトガワカルカラ、結局 $b(a)$ ハ $f(z)$ ノ
 除外値ヲ除イタトコロヲ定義サレ、ソコデ一價、正則デ
 アル。同様ノコトガ $a = a(b) =$ ツイテモ云ヘルカラ、
 コレハ一値函数デナケレバナラヌ。

Remark.

Nevanlinna, Cartan ハ *meromorphic function* ハ

$$E_z(f(z)=a) = E_a(f)$$

トオクトキ、 $E_{a_i}(f)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) = ヨツテ決定
 サレ

$$f(z) = a$$

ノ *multiplicity* $\neq \infty$ 等ハ $\lambda \leq \lambda_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$
 $= -1$ ナルトキヲ除ケバ四ツデト分デアルコトヲ示シタ。
 全ク同様 = (*multiplicity* $\neq \lambda_i$)

$$E_{a_i}(f) = E_{b_i}(g) \quad i=1, 2, 3, 4$$

ナラバ

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq -1$$

$$g = \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}$$

ナルコトが云へル。^{*}

之ヲ用ヒルト 2) の定理ハ次ノ如クニ証明サレヌ。

$$a = a_i \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \neq -1$$

$a_i \neq \text{exceptional pt. of } f.$

ヲトレバソレニ對應シテ

$$b = b_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

が定マル。シカニ $E_{a_i}(f)$, $E_{b_i}(g)$ ノ multiplicity

ヲコトテ一致スル。

* $a_4 \rightarrow \infty$, $b_4 \rightarrow \infty$ ナルヨリナ一次変換ヲ $f, g =$ ホ
ドコシテ考ヘレバ

$$\infty, a_1, a_2, a_3; \quad \infty, b_1, b_2, b_3$$

ニツイテ定理ヲ証明スレバヨイ。コノタメニ、例ノ如ク

$$\frac{f - a_i}{g - b_i} = e^{\varphi_i}, \quad i=1, 2, 3$$

トオケバ f, g ヲ消去スルコトニヨリ

$$\sum (a_2 - a_3) e^{\varphi_1} + \sum (b_2 - b_3) e^{\varphi_2 + \varphi_3} = 0$$

ヲ得ル。コレハ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ノチ少クトモ一ツガ const

ナナイト不能デアル。

3) $\alpha = f(z), g(z)$, group of functions of automorphism \rightarrow 夫々 F, G トスルトキ F が G , subgroup トナルトキヲ考へル。

即チ

$$f(\varphi(z)) = f(z)$$

ヲ満足スルスベテ, $\varphi(z) = \text{對シテ}$

$$g(\varphi(z)) = g(z)$$

が成立スルトセヨ。コノ時 = モ前ト同様 = ヌレバ

$$b = b(a)$$

ハ a ノ \sim 價函数デアル。シカシ b ハ a ノ \sim 價函数トハ限ラナイ。依ツテ

i) $a = a(b)$ が finite-valued , トキハ

$$b = R(a) \text{ トナルカラ}$$

$$g(z) = R(f(z)), \quad R \text{ ハ rational } f.$$

ii) $a = a(b)$ が infinitely many valued , トキハ

$$b = h(a)$$

但シ $h(a)$ ハ $f(z)$, exceptional value (コレハ高々2ツシカナイ) 以外デハ meromorphic 函数デアル。

依ツテ

$$g(z) = h(f(z))$$