# 89. 單葉函數ニツイテ

城 憲三 (阪大工)

## 1 單葉函數ノ Bloch 常數 $\mathfrak{A}$.

$w=f(z)=z+\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル正則單葉函數トシコノ集合ヲ $S$ トスル。$S$ ニ屬スルスベテノ函數 $f(z)$ ノ Bild-bereich 内ニ全ク含マレ得ル様ナ円ノ半徑ノ上限ガ存在スルガ、ソレヲ Landau ニ從ッテ $\mathfrak{A}$ トスル. $\mathfrak{A}$ ハ宇宙常數デアル。Landau ハ Math. Zeitschr. 30, 1929, pp. 608–634 ニ於テ立派ナ計算ノ後

$$(0{,}555<)\frac{9}{16}<\mathfrak{A}\leqq\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

ナル結果ヲ得タ。$\mathfrak{A}$ ノ値自身ハ未ダ不明デアル. 上ノ $\frac{\pi}{4}$ ナル數ハ函數 $f(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ ガ $|z|<1$ ヲ $|\mathfrak{J}f(z)|<\frac{\pi}{4}$ ニ寫像スルコトカラ知ッタモノデアル。

Landau ノ計算ハ實ニ妙ヲ得テヰルケレドモ、上ニ限ッタ數 $\frac{\pi}{4}$ ニツイテハ少シ手落チガアル. シカモ上記論文 P. 615 ニ

*Über $\mathfrak{A}$ nach oben weiß ich nichts Besseres als das triviale*

$$\mathfrak{A}\leqq\frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

ト明言シテヰル. 筆者ハ數年前ニ (2) ノ結果ノヨロシクナイコトヲ知ッテヰタガ、問題ガ小サイノデ何モ發表シナカッタガ、最近 America ノ Bulletin ノ Abstract ニ

Robinson ト云フ人ガ $\alpha < \frac{3}{4}$ 等トナリ得ル事實ダケヲ掲ゲタ (September 24, 1934).

私ハ $\alpha < \frac{3}{4}$ ナルコトノ証明ヲ示シテ見タイ。(尚モット scharf ニ限ルコトモ出来ル)

$|z|<1$ ヲ $-1$ カラ $-r$ $(0<r<1)$ マデ線分ノ cut ヲ有スル單位円(第一圖)ニ寫像スル函數ヲ $h(z)$ トスレバ


(第一図)

$$\frac{h(z)}{[1-h(z)]^2} = p\,\frac{z}{(1-z)^2},\quad p=\frac{4r}{(1+r)^2}$$

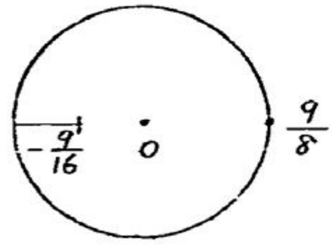
デアル。[Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse -----, S, 112—114 参照]

上式カラ

$$h(z) = pz + \cdots\cdots$$

トナルカラ函數

$$w = H(z) = \frac{h(z)}{p} = z + \cdots\cdots$$



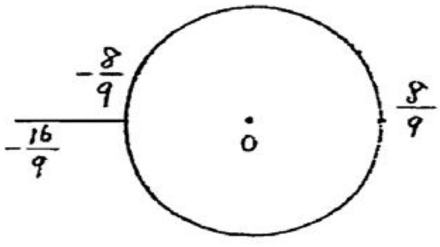

(第二図)

ハ $|z|<1$ ヲ $w$—平面ノ半径 $\frac{(1+r)^2}{4r}$, 線分 $-\frac{(1+r)^2}{4r}$ ------ $-\frac{(1+r)^2}{4}$ ヲ cut トスル円内ニ寫像スル. 今特ニ $r=\frac{1}{2}$ トスレバ上ノ円ハ半径 $\frac{9}{8}$, cut ガ線分 $-\frac{9}{8}$ ------ $-\frac{9}{16}$ トナル.(第二圖)

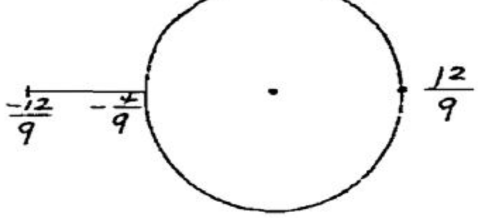
一般ニ $S$ ノ函數ノ $w$—平面上ノ取ラナイ閉点集合ヲ $\mathfrak{M}$ トシ、変換 $\eta=\frac{1}{w}$ デ $\mathfrak{M}$ ノ寫ル集合ヲ $\mathfrak{M}^{-1}$ トスレバ $\eta$—平面ノ $\mathfrak{M}^{-1}$ 外ノ点ハ $\zeta=\frac{1}{z}$ ナル $|\zeta|>1$ ニ寫像サレル。即チ $\mathfrak{M}^{-1}$ ノ Abbildungsradius ハ 1 デアルト云フ。

トコロガ Abbildungsradius ハ Translation ニ無関

係デアルカラ今ノ場合ノ $\mathfrak{M}^{-1}$ ハ第三圖デ示サレルモノデアルガ、今コレヲ實軸ニ沿ウテ $\frac{4}{9}$ ダケ translate シテ第四図ノ位置ニシテ見ル。

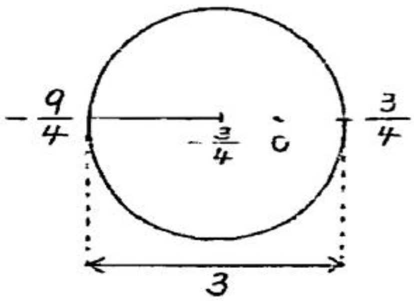



(第三図)




(第四図)

スルト $\mathfrak{M}$ ノ圖形ハ第五圖トナル。




(第五図)

即チ $|z|<1$ ハ函數

$$\frac{1}{\frac{1}{H(z)}+\frac{4}{9}} = z + \cdots\cdots$$

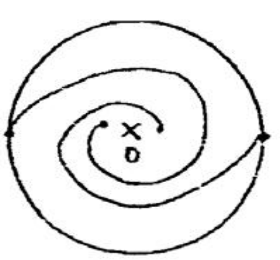
ニヨッテ半径3ナル一ツノ半径ニ沿ウタ cut ヲ有スル円内ニ寫像サレル.

ダカラ

$$\alpha < \frac{3}{4}$$

デアル。

cut ノ數ヲ澤山考ヘタ円ニ寫像スルコトニヨッテ $\alpha$ ヲモット小サナ数デ abschätzen スルコトガ出來ルケレドモソレハ述ベナイ。恐ラク第六図ノ様ナ適當ナ Neigungswinkel ヲ有スル Logarithmische Spirale ヲ cut ニ有スル円ヲ考ヘタラ或ハ最上ノ結果ニ到達スルカモ知レナイガ、ソレハマダ想像デアル. 結局 Landau ノ計算ハ益々偉彩ヲハナツダラウト思フ。




(第六図)

## 2 係數問題

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots,\quad f(z)\subset S$$

トシタトキニ

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|a_n|}{n}=L$$

トオケバLハ又一ツノ宇宙常數デアル. $L=1$ ナルコトハ想像サレテハヰルが Landau が示シタ結果:

$$L<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)e$$

が現今知ラレタ最高ノ結果デアル。

シカシ、Marty ハ昨年ノ Comptes Rendus t. 198, pp. 1569—1571 ニ於テ $|a_n|$, $(n=2,3,\cdots\cdots)$ が Max. ニナル様ナ函數 $f(z)$ ハ $|z|<1$ ヲ必ズ $w$—平面ノ外点ヲ有シナイ Schlitzbereich ニ寫像シナケレバナラヌトイフコトヲ示シタ。

又Lヲ abschätzen スル場合ニハ

$$|f(z)|=O\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right),\quad r\to 1 \qquad (1)$$

ナルモノノミヲ考フレバ足ル. 何トナレバ早々

$$\underset{|z|=r}{Max}|f(z)|=O\left(\frac{1}{(1-r)^{1+\tau}}\right),\quad r\to 1\quad (0<\tau<1)$$

ナルトキニハ、容易ニ

$$a_n=O(n^\tau)$$

トナルコトヲ示セルカラデアル. Marty ニ從ッテ Schlitzbereich ニ寫像スルモノデ、シカモ (1) ヲ滿足スル様ナ函數ノミヲ考ヘ、尚且ツ Löwner ノ思想ニヨッテ Schlitzkurve

ヲ regular ナ kurve デ approximieren スルト考ヘルナラバ $f(z)$ ハ $|z|=1$ 上ニ必ズ2次ノ Pol ヲ有スルベキデアルト考ヘル。(之レニ誤リガアリサウニモ思ヘルケレドモ、コノ点ニツキ特ニ御高教ヲ賜ハリタイモノト思ツテヰル)

筆者ハ数年前カラ次ノ様ナ定理ヲ考ヘテヰタ。

定理. $f(z)\subset S$ ガ $|z|=1$ 上ニ一ツノ2次ノ Pol ヲ有シテヰテ、$|z|=1$ 上ノ他ノ点デハ代数的ナ特異点シカ持タナイナラバ

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\frac{|a_n|}{n}=L\leqq 1$$

デアル。

証. $$\varphi(z)=\sqrt{f(z^2)}=\sum_{1}^{\infty}b_n z^n \quad (b_1=1)$$

ハ $|z|<1$ デ ungerade ナ schlichte funktion デ、$f(z)$ ノ2次ノ Pol ヲ $z=1$ ニアリトスレバ $\varphi(z)$ ハ $z=\pm 1$ デ1次ノ Pol ヲ有スル. $|z|<1$ 内ノ $z=\pm 1$ ノ近傍ハ $\varphi(z)$ ニヨツテ $\infty$ 点ノ近傍ヲ一通リ掩フカラ (Schlitzbereich ノミヲ考フ). $|z|=1$ ノ他ノ点ノ特異点ノ Order (Hadamard ノ意見) ハ negative デアル。

$$h(z)=\frac{\varphi(z)}{z}(1-z^2);\quad \varphi(z)=\frac{z\,h(z)}{1-z^2}$$

トオケバ

$h(z)$ ハ $z=\pm 1$ デ regular デ且ツ

$$h(z) = 1 + \alpha_2 z^2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n} z^{2n} + \cdots\cdots$$

トオケバ

$$b_{2n+1} = 1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n} \qquad (2)$$

デアッテ、且ツ

$$h(1) = \sum_0^\infty \alpha_{2n}$$

ハ conv. デアル. 而シテ $z = r\ (r > 1)$ ナルトキ

$$\varphi(r) = \frac{r h(r)}{1 - r^2}$$

ニシテ $|\varphi(r)| \leqq \dfrac{r}{1 - r^2}$ デアルカラ

$$|h(r)| \leqq 1 \qquad (3)$$

従ッテ Abel ノ定理ニヨッテ $r \to 1$ ヲ考ヘルト

$$\lim_{r \to 1} h(r) = h(1) = 1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_{2n} + \cdots\cdots$$

デアルが (3) ニヨッテ

$$\left| \sum_0^\infty \alpha_{2n} \right| \leqq 1$$

ヲ得ル、故ニ (2) ニヨッテ

$$\overline{\lim_{n = \infty}} |b_{2n+1}| \leqq 1$$

デアル. コレが云ヘルト

$$\overline{\lim} \frac{|a_n|}{n} \leqq 1$$

ヲ証明スルコトハ容易デアル (Landau ノ計算ヲ modify スル)

御批判ヲ賜リタイモノデアル。

——— ( 終リ ) ———