90. 函數ノ單葉性（多葉性）ニツイテ

木村邦五郎（東京物理學校）

能代氏ハ本誌18号デ"$f(z)$ ヲ凸狀領域Dデ正則デ且ツコヽデ $\Re(e^{i\alpha}f'(z))>0$ （α ハ或ル實常數）ナラバ $f(z)$ ハDデ單葉デアル"ト云フ定理ノ簡單ナ証明法ヲ紹介サレタ。コノ方法ニ少シノ工夫ヲ加ヘテ見タラ次ニ述ベル樣ナ結果ガ出マシタ。

定理1. $f(z)$ ガ凸狀領域Dデ正則デ且ツコヽデ

$$\Re(e^{i\alpha}f^{(p)}(z))>0 \quad (\alpha\text{ ハ或實常數, } p\text{ ハ正整數})$$

ナラバ $f(z)$ ハDデ高々 p 葉デアル。

上ノ定理ヲ証明スルノニ次ノ補助定理ヲ用ヒル。

補助定理 $f(z)$ ハ凸狀領域Dデ正則トシ、$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_{p+1}$ ガDニ屬スルトキ

$$\Delta_0(z_1)=f(z_1), \quad \Delta_1(z_2,z_1)=\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}, \cdots\cdots$$

$$\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)=\frac{\Delta_{p-1}(z_{p+1},z_{p-1},\cdots\cdots,z_1)-\Delta_{p-1}(z_p,z_{p-1},\cdots\cdots,z_1)}{z_{p+1}-z_p}$$

$$(p=1,2,\cdots\cdots)$$

トスレバ（除數=0ナルトキハ勿論ソノ極限値ガ存在スルカラコノ極限値ニ等シイモノトスル）

$$\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f^{(p)}\{z_1+(z_2-z_1)t+(z_3-z_2)tt_1+\cdots\cdots+(z_{p+1}-z_p)tt_1\cdots\cdots t_{p-1}\}\,t^{p-1}t_1^{p-2}\cdots\cdots t_{p-2}\,dt\,dt_1\cdots\cdots dt_{p-1}$$

ガ成立スル。但シ $t_0=t$ トスル、勿論 $f^{(p)}$ ノ括弧内ノ点ハDニ屬ス。

証明. 今 $z_2 \neq z_1$ ガ D ニ属ストセバ線分 z_1z_2 即チ

$z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad 0 \leqq t \leqq 1$ ガ D ニ属ス故

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_2z_1} f'(z)\,dz \quad \text{(コンデ } z \text{ カラ } t \text{ ニ変換スレバ)}$$

$$= \int_0^1 f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)(z_2 - z_1)\,dt$$

$$= (z_2 - z_1)\int_0^1 f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,dt$$

$$\therefore \quad \Delta_1(z_2, z_1) = \int_0^1 f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,dt$$

所ガコノ結果ハ $z_1 = z_2$ ノトキモ成立スルコトハ明ラカデアルカラ定理ハ $p = 1$ ノトキ成立ツ.

$$\Delta_1(z_3, z_1) - \Delta_1(z_2, z_1) = \int_0^1 \left[f'(z_1 + (z_3 - z_1)t) - f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)\right] dt$$

然ルニ $\quad f'(z_1 + (z_3 - z_1)t) - f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)$

$$= \int_{z_1 + (z_3 - z_1)t,\ z_1 + (z_2 - z_1)t} f''(z)\,dz$$

($\because$ z_1, z_2, z_3 ガ D ニゾクシ $0 \leqq t \leqq 1$ ナル故 $z_1 + (z_3 - z_1)t$, $z_1 + (z_2 - z_1)t$ ガ D ニゾクス、故ニ線分 $z_1 + (z_3 - z_1)t$, $z_1 + (z_2 - z_1)t$ 即チ $z = z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_2)t\,t_1$, $0 \leqq t_1 \leqq 1$ ガ D ニゾクス) 上ノ積分変数 z ヲ $(z_3 - z_2)t \neq 0$ トシテ t_1 ニ変換スレバ

$$f'(z_1 + (z_3 - z_1)t) - f'(z_1 + (z_2 - z_1)t) =$$

$$(z_3 - z_2)\int_0^1 f''(z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_2)t\,t_1)\,t\,dt_1$$

コノ式ヨリ

$$\frac{f'(z_1 + (z_3 - z_1)t) - f'(z_1 + (z_2 - z_1)t)}{z_3 - z_2}$$

$$= \int_0^1 f''(z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_2)t\,t_1)\,t\,dt_1$$

トナリ、コレハ $(Z_3-Z_2)t=0$ デモ成立スルカラコレヨリ

$$\Delta_2(Z_3,Z_2,Z_1)=\int_0^1\int_0^1 f''\big(Z_1+(Z_2-Z_1)t+(Z_3-Z_2)tt_1\big)t\,dt_1\,dt$$

Δ_1 カラ Δ_2 ヲ積分デ表ハシタ式ヲ出シタヤウニ Δ_n ノトキ定理ガ成立スルトキ Δ_{n+1} ニツイテモ成立スルコトガ証明サレルガ上ト同様デアルカラコヽニハ略ス、依テ数學的帰納法ニヨリ定理ノ眞ナルコトガワカル。

<u>定理1ノ証明</u>　$\alpha=0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイカラ、今 D デ $\mathcal{R}\big(f^{(p)}(Z)\big)>0$ ナリトスル。補助定理ニヨッテ

($\Delta_k(Z_{k+1},Z_k,\text{------},Z_1)$ ハ補助定理ト同ジ意味トスル、以下同様)

$$\Delta_p(Z_{p+1},Z_p,\text{-----},Z_1)=\int_0^1\int_0^1\text{----}\int_0^1 f^{(p)}\big(Z_1+(Z_2-Z_1)t+\text{---------}$$

$$\text{-----}+(Z_{p+1}-Z_p)tt_1\text{----}t_{p-1}\big)t^{p-1}t_1^{p-2}\text{-----}t_{p-2}\,dt\,dt_1\text{-----}dt_{p-1}$$

$$\therefore\quad \mathcal{R}\Delta_p(Z_{p+1},Z_p,\text{-----},Z_1)=\int_0^1\int_0^1\text{-----}\int_0^1\mathcal{R}f^{(p)}\big(Z_1+(Z_2-Z_1)t+\text{----}$$

$$\text{-----}+(Z_{p+1}-Z_p)tt_1\text{----}t_{p-1}\big)t^{p-1}t_1^{p-2}\text{-----}t_{p-2}\,dt\,dt_1\text{-----}dt_{p-1}$$

コレニ "$u(t,t_1,\text{-----},t_{p-1})$ ガ $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq t_1\leqq 1$, ------, $0\leqq t_{p-1}\leqq 1$ ニテ連続デ且ツ負ナラザル實函数デ且ツ上ノ區間ニゾクスル一点 $(t',t_1',\text{-----},t_{p-1}')$ デ正ナラバ $\int_0^1\int_0^1\text{-----}\int_0^1 u(t,t_1,\text{-----},t_{p-1})\,dt\,dt_1\text{-----}dt_{p-1}>0$ デアル" ト云フ定理ヲ用フレバ $\mathcal{R}\Delta_p(Z_{p+1},Z_p,\text{-----},Z_1)>0$ トナリ從ッテ $\Delta_p(Z_{p+1},Z_p,\text{-----},Z_1)\neq 0$, 故ニ $f(Z)$ ハ D ニ於テ高々 p 葉デアル。

系1. $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ ヲ $|z|<r$ デ正則、且ツコヽデ

$\left|\dfrac{f^{(p)}(z)}{p!}-a_p\right|<|a_p|$ ナラバ $|z|<r$ デ高々 p 葉デアル。

コレハ能代氏ガ本誌18号デ豫想Aトシテ述ベラレタモノデアル。

證明. $a_p=|a_p|e^{i\alpha}$ （α ハ實常數）トオケバ $\mathcal{R}\left(\dfrac{f^{(p)}(z)}{p!}\cdot e^{-i\alpha}\right)>0$ ガ假設ヨリ得ラレルカラ、結局定理1ヲ用ヒテ系1ガ正シイコトガワカル。

系2. 特ニ $p=1$ トスレバ單葉函數ニ關スル能代氏ノ定理Aトナル。

次ニ $f(z)=\dfrac{1}{z}+a_0-a_1z+\cdots\cdots+a_pz^p+\cdots\cdots$ ガ $0<|z|<r$ デ正則デ且ツ $\left|\dfrac{z^{p+1}f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!}-1\right|<1$ ナルヤウナ函數 $f(z)$ ヲ考ヘヤウ。

$f(z)-\dfrac{1}{z}=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_pz^p+\cdots\cdots\quad=g(z)$ トオケバ $g(z)$ ハ $|z|<r$ デ正則デアル。 $z_{p+1}, z_p, \cdots\cdots, z_1$ ヲ $0<|z|<r$ 内ノ點トスル、

又 $\Delta_0(z_1)=f(z_1),\ \Delta_1(z_2, z_1)=\dfrac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1},\ \cdots\cdots$

$\cdots\cdots,\ \Delta_k(z_{k+1}, z_k, \cdots\cdots, z_1)=\dfrac{\Delta_{k-1}(z_{k+1}, z_{k-1}, \cdots\cdots, z_1)-\Delta_{k-1}(z_k, z_{k-1}, \cdots\cdots, z_1)}{z_{k+1}-z_k},$
$(k=1,2,\cdots\cdots,p)$

トスレバ上記補助定理ヲ用フレバ

$$\Delta_p(z_{p+1}, z_p, \cdots\cdots, z_1)=\frac{(-1)^p}{z_1z_2\cdots z_{p+1}}+\int_0^1\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1 g^{(p)}(z_1+(z_2-z_1)t+\cdots$$

$$\cdots\cdots+(z_{p+1}-z_p)tt_1\cdots\cdots t_{p-1}\big)t^{p-1}\cdots\cdots t_{p-1}dt\cdots\cdots dt_{p-1}$$

又 $0<|z|<r$ ニテハ $f^{(p)}(z)-\dfrac{(-1)^p p!}{z^{p+1}}=g^{(p)}(z)$ ナル故上ノ假説ヨリ $\left|\dfrac{z^{p+1}g^{(p)}(z)}{p!}\right|<1$ 即チ $|g^{(p)}(z)|\leqq\dfrac{p!}{r^{p+1}}$

（上ノ條件ヨリ $\max\limits_{|z|\leqq r'<r}\left|\dfrac{z^{p+1}g^{(p)}(z)}{p!}\right|<1$ デ max ハ境界デトルカラ $|g^{(p)}(z)|<\dfrac{p!}{r'^{p+1}}$ ヨリ上式ガ出ル）

$$\therefore\quad |\Delta_p(z_{p+1},z_p,\cdots\cdots,z_1)|\geqq\frac{1}{|z_1z_2\cdots\cdots z_{p+1}|}-\int_0^1\!\!\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1\frac{p!}{r^{p+1}}t^{p-1}t_1^{p-2}\cdots\cdots t_{p-1}\,dt\,dt_1\cdots\cdots dt_{p-1}$$

$$>\frac{1}{r^{p+1}}-\frac{p!}{r^{p+1}}\cdot(p!)^{-1}=0$$

依ッテ次ノ定理ヲ得。

定理2 $f(z)=\dfrac{1}{z}+a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_pz^p+\cdots\cdots$ ガ $0<|z|<r$ デ正則デ、且ツコヽデ $\left|\dfrac{z^{p+1}f^{(p)}(z)}{(-1)^p p!}-1\right|<1$ ナラバ $f(z)$ ハ $0<|z|<r$ デ高々 p 葉デアル。

系. 特ニ $p=1$ トスレバ能代氏ガ本誌18号デ述ベラレタ單葉函數ニ関スル定理B′トナル。

次ノ定理ハ、ゴクツマラヌモノデアルガ序デヾアルカラ述ベテオク。

定理. $f(z)=\dfrac{1}{z}+g(z)$ デ $g(z)$ ガ凸狀領域D（$z=0$ ヲ含ム）デ正則デ、且ツ D_0^* ヲDカラ $z=0$ ヲ除イタ領域トスルトキ D_0^* デ $|g'(z)|\leqq M$ 即チ $\left|\dfrac{f'(z)\cdot z^2+1}{z^2}\right|\leqq M$ トスレバ $f(z)$ ハ $0<|z|<\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ ト D_0^* ノ共通部分デ單葉

デアル。

コノ $\dfrac{1}{\sqrt{M}}$ ガコレヨリ大キク出来ヌコトハ $f_0(z)=\dfrac{1}{z}+a_0+Mz$,

即チ $g_0(z)=a_0+Mz$ ノトキ

$$f_0'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{M}}\right)=\frac{-1+M\left(\pm\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}=0$$

ヨリワカル. コレハ定理２ノ系ヲ幾分カ擴張シタモノデアル。

證明ハ定理２ト同様ノ方針デ出来ル、コヽニハ省略スル、又定理２モ上ノヤウニ幾分カハ拡張出来ルガ、コヽニハ省略スル。終リニ援助ヲタマハッタ森本先生並ニ平野氏ニ敬意ヲ表シマス。（昭和10年1月29日）