104. 一般收斂定理

泉　信一

1. *Bochner* ガ彼ノ著書"Fouriersche Integrale, 1933"ニ於テ次ノ二ツノ定理ヲ証明シタ。

定理1. 若シ(1°) $f(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ有界デ, (2°) 点 $\xi=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続及ビ (3°) $|K(\xi)|$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナラバ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{\xi}{n}\right) K(\xi)\, d\xi = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi)\, d\xi \cdots\cdots\cdots (A)$$

定理2. 若シ(1°) $|f(\xi)|$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分, (2°) 点 $\xi=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続、(3°) $|K(\xi)|$ ガ $(-\infty,+\infty)$ デ可積分, (4°) $K(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ デ有界及ビ (5°) $|\xi|\to\infty$ ノトキ $K(\xi)=o(|\xi|^{-1})$ トスルナラバ、(A) ガ成立スル。

本年一月ノ學士院記事デ、私ガ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

定理3. 若シ (1°) $\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ 及ビ $\dfrac{|f(\xi)|^2}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分, (2°) 点 $=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続, (3°) $|K(\xi)|$ 及ビ $|\xi K^2(\xi)|$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナラバ、(A) ガ成立スル。

2. 定理3ハ次ノ様ニ一般ニ出来ル。

定理4. 若シ (1°) $\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ 及ビ $\dfrac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$ $(p>1)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ デ可積分, (2°) 点 $\xi=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続及ビ (3°) $|K(\xi)|$

及ビ $|\xi^{q-1}K^q(\xi)|$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナラバ、(A)ガ成立スル。

コノ定理ヲ証明スルニハ、定理3ヲ証明スルトキニ用ヒタ *Lemma 1* ト以下述ベル補助定理トヲ用ヒテ、定理3ト全ク同様ニヤレバヨイ。但シ *Schwarz* ノ不等式ヲ用ヒタ所ヲ *Hölder* ノ不等式ニカヘレバヨイ。

補助定理. 若シ $K^*(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ L^q-*class* ニ属スルトキ

$$K^*_\lambda(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K^*(\xi)\,\frac{\sin^2\lambda(\xi-\eta)}{\lambda(\xi-\eta)^2}\,d\xi$$

トオクナラバ,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K^*(\xi)-K^*_\lambda(\xi)\right|^q d\xi=0.$$

之レヲ証明スルニハ、$K(\xi)$ ガ *Step function* ノトキ特ニ

$$K(\xi)=1,\quad \xi\in(a,b);\quad K(\xi)=0,\quad \xi\,\bar{\in}\,(a,b)$$

ノ場合ヲ証明スレバヨイ。コノトキニハ $K^*_\lambda(\xi)$ ガ容易ニ計算出来ルカラ、容易ニ求ムル結果ヲ得ル。(詳細ハ *Wiener, Fourier Integral and Certain of its applications, Lemma 79* ヲ参照)

3. 定理4ニ於テ $p\to 1$ 及ビ $p\to\infty$ ノ極限ノ場合ヲ考ヘル. L^∞ ハ通常ノ様ニ有界函数ノ *class* トスル.

先ヅ $p\to\infty$ トスルトキ. $q\to 1$. $\frac{|f^p(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$

ニ可積分ナコトハ $\left|f^{p}(e^{\tau})\right|$ ガ $(0,\infty)$ デ可積分ナコトト同ジデアル；故ニ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニナル。$\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ノ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトハ $f(\xi)$ ノ有界ナコトニヨッテオキカヘラレルコトハ、"Lemma 1" カラ明カデアル。又 $q\to 1$ ノトキ $\xi^{q-1}K^{q}(\xi)\to K(\xi)$、故ニ此ノ場合ニハ定理1ヲ得ル。

次ニ $p\to 1$ ナラシメルトキ、定理4ノ條件$(1°)$ハ $\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトニナル。$\left|\xi^{q-1}K^{q}(\xi)\right|$ ノ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分ナコトハ $\left\{e^{\tau}K(e^{\tau})\right\}^{q}$ ガ $(0,\infty)$ デ可積分ナコトデアル。故ニ $q\to\infty$ ノトキハ、$xK(x)=O(1)$ トナル、故ニ次ノ定理ヲ得ル。

定理2'. 若シ $(1°)$ $\dfrac{|f(\xi)|}{1+|\xi|}$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分、$(2°)$ 点 $\xi=x$ ニ於テ $f(\xi)$ ガ連続、$(3°)$ $K(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ ニ於テ可積分、及ビ $(4°)$ $K(\xi)$ ガ $(-\infty,+\infty)$ デ有界ナラバ (A) ガ成立スル。

1ノ定理ハ果シテ成立スルダラウカ、之ハ定理2ノ條件$(1°)$ガ一般ニナリ、條件$(5°)$ガ不用ニナッテヰル。

4. 何レニセヨ、定理4ハ定理3ヲフクミ、定理1及ビ2ヲ(大体ニ於テ)極限ノ場合ニモツコトニナル。