107. Denjoy積分ノ擴張ニツイテ[1]

泉 信一

コヽニ二ツノ新シイ積分ヲ定義スル。第一ノ積分ハ一般Denjoy積分ヲVerblunskyガFund. Math., 23(1934)ニ於テ擴張シタモノヲ修正シタモノデ、第二ノ積分ハ特種Denjoy積分ヲ同様ノ方法デ拡張シタモノデアル。

以下用ヒル術語ハSaksノ積分論(Théorie de L'Integrale 1932)ニヨル。

$\boxed{\mathrm{I}}$ $F(x)$ヲ閉區間$I=(a, b)$ニ於テ定義サレタ有限函數トスル。モシ$F(x)$ガIニ於テ次ノ二ツノ條件ヲ滿足スルトキ、$F(x)$ハapproximately generalized absolutely continuousデアルトイフ。乃チ

(A) $F(x)$ガ連續函數ノapproximate derivativeデアル。

(B) Iノ任意ノ閉集合Eニ對シテ、Eノ適當ナportion Pヲトルトキ、$F(x)$ハPニ於テgeneralized absolutely continuousデアル。

モシ$F(x)$ガIニ於テapproximately generalized absolutely continuousナラバ、$F(x)$ハ(AGAC)-

[1] 最近出タKennedy及ビPollardノ論文ニDenjoy積分ノ拡張ガアリマス。ソノ論文ノ脚註ニ著者ノ第一ノ論文ト比較シテ両者ガ本質的ニチガフコトヲ述ベテアリマス。ケレドモ著者ノ第二ノ論文ノ結果ハKennedy及ビPollardノト本質的ニ同ジデス。更ニRidder. Fund., Math., 22(1934)參照。

class ニゾクスルトイヒ、$F_I(x) \in$ (AGAC) 又ハ單ニ $F(x) \in$ (AGAC) トカク。

又 $F(x)$ ガ次ノ二ツノ條件ヲ滿足スルトキ approximately generalized absolutely continuous* デアルトイフ. 乃チ

(A*) $F(x)$ ガ連續函數ノ微分係數デアル。

(B*) I ノ任意ノ閉集合 E ニ對シテ、E ノ適當ナ portion P ヲトルトキ、$F(x)$ ハ P ニ於テ generalized absolutely continuous* デアル。

モシ $F(x)$ ガ I ニ於テ approximately generalized absolutely continuous* ナラバ、$F(x)$ ハ (AGAC*)-class ニゾクスルトイヒ、$F_I(x) \in$ (AGAC*) 又ハ $F(x) \in$ (AGAC*) トカク。

然ルトキ次ノ定理ヲ得ル。

定理 1. モシ $F(x)$ ガ I ニ於テ (AGAC)-class ニ屬スルナラバ、$F(x)$ ハ I ノ殆ンドスベテノ点デ finitely approximately differentiable デアル。

定理 2. モシ $F(x)$ ガ I ニ於テ (AGAC*)-class ニ屬スルナラバ、$F(x)$ ハ I ノ殆ンドスベテノ点デ finitely differentiable デアル。

$\boxed{2}$ $f(x)$ ガ區間 I ニ於テ定義サレテルトスル。モシ一点 $\xi(\in I)$ ノ任意ノ近傍ニ於テ $f(x)$ ガ (D)-integrable

デナイナラバ、ξヲ $f(x)$ ノ Singular point トイフ；又 (D*)−integrable デナイナラバ、ξヲ $f(x)$ ノ Singular* point トイフ。（モシξガ I ノ端ノ点ナラバ、ξニ於テ片側ノ近傍ダケヲ考ヘル）

モシ $f(x)$ ガ次ノ三ツノ條件ヲ満足スルトキ、$f(x)$ ハ integrable in the approximate Denjoy sense 又ハ單ニ (AD)−integrable トイヒ、$f(x)$ ノ I ニ於ケル (AD)−integral $F(b)-F(a)$ ヲ次ノ三ツノ演算デ計算スル。乃チ

條件 I. $f(x)$ ノ I ニ於ケル Singular points ノ作ル set ハ non-dense デアル。

演算 I. (α, β) ガ閉集合デ、$f(x)$ ノ Singular point ヲフクマナイナラバ

$$F(\beta)-F(\alpha)=(D)\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$$

條件 II. モシ $F(\delta)-F(\gamma)$ ガ $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ ヲ満足スルスベテノ γ 及ビ δ ニ對シテ定義セラレテルナラバ、$F(x)$ ハ (α, β) ニ於テ (D)−integrable デ且ツ

$$ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(D)\int_{\beta-h}^{\beta}\{F(x)-F(\delta)\}\,dx$$ (1)

(1) ap. lim ハ Saks ノ本ニオケル approximate limit 即チ lim ap デアル。

及ビ

$$ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(\mathrm{D})\int_{\alpha}^{\alpha+h}\{\mathrm{F}(\gamma)-\mathrm{F}(x)\}dx$$

ガ存在スル。

演算II. モシ $\alpha<\gamma<\delta<\beta$ ナラバ

$$\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\delta)=ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(\mathrm{D})\int_{\beta-h}^{\beta}\{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(\delta)\}dx$$

及ビ

$$\mathrm{F}(\gamma)-\mathrm{F}(\alpha)=ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(\mathrm{D})\int_{\alpha}^{\alpha+h}\{\mathrm{F}(\gamma)-\mathrm{F}(x)\}dx$$

條件III. モシ任意ノ non-dense closed set E ニ對シテ、E ノ各々ノ contiguous intevals (a_n, b_n) ニ對シ $\mathrm{F}(b_n)-\mathrm{F}(a_n)$ ガ知ラレテルトキ、次ノ條件ヲ満足スル E ノ portion P ガアル。乃チ

1°. $f(x)$ ハ P ニ於テ (D)-integrable デアル。

2°. P ノ上限及ビ下限ヲソレゾレ c 及ビ d トシ、P ノ (c, d) ニ関スル contiguous intervals ノ system ヲ $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ トスルトキ

$$\sum_n\left|\mathrm{F}(\beta_n)-\mathrm{F}(\alpha_n)\right|<+\infty. \qquad (1)$$

演算III. 上ニ求メタ (c, d) ニ對シテ

$$\mathrm{F}(d)-\mathrm{F}(c)=(\mathrm{D})\int_{P}f(x)dx+\sum_n\{\mathrm{F}(\beta_n)-\mathrm{F}(\alpha_n)\}.$$

モシ $f(x)$ ガ $I=(a, b)$ ニ於テ (AD)-integrable ナラバ

$$F(b)-F(a)=(AD)\int_a^b f(x)\,dx$$

ト書ク。

以上ノ (AD)-*integral* ノ定義ニ於テ、*Singular point*, (D)-*integral*, *ap. lim* 及ビ (1) ヲソレゾレ *Singular** *point*, (D^*)-*integral*, *lim* 及ビ

$$\sum \omega_k < +\infty$$

デオキカヘテ得ル積分ヲ (AD^*)-*integral* トイヒ、I ニ於テ (AD^*)-*integral* ヲ

$$F(b)-F(a)=(AD^*)\int_a^b f(x)\,dx$$

デ表ハス。コヽニ ω_k ハ $F(x)$, (α_k, β_k) ニ於ケル *oscillation* トスル。

$\boxed{3}$ カク定義サレタ (AD)-*integ.* 及ビ (AD^*)-*integ.* ハソレゾレ (D)-*integ.* 及ビ (D^*)-*integ.* ノ擴張デアル。更ニ次ノ定理が成立スル。

定理 2. モシ $f(x)$ ガ $I=(a,b)$ ニ於テ (AD)-*integrable* デ、且ツ

$$F(x)-F(a)=(AD)\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a<x\leqq b)$$

ナラバ、$F_I(x) \in (AGAC)$.

定理 2^*. モシ $f(x)$ ガ $I=(a,b)$ ニ於テ (AD^*)-*integrable* デ、且ツ

$$F(x)-F(a)=(AD^*)\int_a^x f(t)\,dt$$

ナラバ、$F_I(x) \in (AGAC^*)$.

定理 3. $F_I(x) \in (AGAC)$ ナラバ、$ADF(x)$ ハ $I=(a,b)$

ニ於テ (AD)-*integrable* デ、且ツ

$$F(b)-F(a)=(AD)\int_a^b AD\,F(x)\,dx$$

定理3*. $F_I(x)\in(AGAC^*)$ ナラバ、$F'(x)$ ハ $I=(a,b)$ ニ於テ (AD^*)-*integrable* デ、且ツ

$$F(b)-F(a)=(AD^*)\int_a^b F'(x)\,dx$$

$\boxed{4}$ $\mathcal{S}$ ノ Saks ノ意味ニ於ケル (abstract) integral (operation) トスル。乃チ任意ノ區間 $I=(a,b)$ ニ對シテ函數ノ class $K(\mathcal{S},I)$ ガ對應シ、各々ノ $f(x)\in K(\mathcal{S},I)$ ニ對シテ有限ナ実數 $\mathcal{S}(f,I)=(\mathcal{S})\int_I f(x)\,dx$ ガ對應スルモノトスル、$\mathcal{S}(\mathcal{S},I)$ ヲ $f(x)$ ノ I ニ於ケル $(\mathcal{S})$-integral トイフ。

但シ indef. $(\mathcal{S})$ integral ノ連續性ヲ (ε, !) 連續性デオキカヘル。乃チ $\mathcal{S}^\times(f)$ ハ (D)-integrable デ

$$\underset{h\to 0}{ap.\lim}\ \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\mathcal{S}^\times(f)\,dx$$

ガ存在スルモノトスル。$\mathcal{S}^*$ ヲ又 integral デ、$\mathcal{S}$ ニ於ケル (D)-integral 及ビ ap. lim ノ代リニ (D^*)-integral 及ビ lim ヲトルモノトスル。

$(\mathcal{S})$-integral ガ次ノ二ツノ條件ヲ満足スルトキ complete デアルトイフ。乃チ

(I) モシ、$\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$ ヲ満足スルスベテノ α' 及ビ β' ニ對シテ $(\mathcal{S})\int_{\alpha'}^{\beta'}f(x)\,dx$ ガ存在シ、$(\mathcal{S})\int_a^x f(t)\,dt$ ガ $J=(\alpha,\beta)$

ニ於テ (D)−integrable デ、且ツ

$$ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(D)\int_{\beta-h}^{\beta}dx(\delta)\int_{\beta'}^{x}f(t)dt$$

及ビ

$$ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(D)\int_{\alpha}^{\alpha+h}dx(\delta)\int_{\alpha'}^{x}f(t)dt$$

ガ存在スルナラバ

$$\delta(f,J)=ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(D)\int_{\beta-h}^{\beta}dx(\delta)\int_{\beta'}^{x}f(t)dt$$
$$+ap.\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}(D)\int_{\alpha}^{\alpha+h}dx(\delta)\int_{\alpha'}^{x}f(t)dt+(\delta)\int_{\alpha'}^{\beta'}f(t)dt.$$

(II) モシ任意ノ non-dense closed set E ニ對シテ E ノ contiguous intervals ノ各々ニ於テ (δ)−integrable デ、E ノ適當ナ portion P ニ對シテ

(1°). $f(x)$ ガ P ニ於テ (δ)−integrable デ

(2°). P ノ上限及ビ下限ヲ c 及ビ d トシ、P ノ (c, d) ニ関スル contiguous intervals ノ system ヲ $\{(\alpha_n,\beta_n)\}$ トスルトキ

$$\sum_n\left|(\delta)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)dx\right|<+\infty \qquad (2)$$

然ルトキ $f(x)$ ハ (c, d) ニ於テ (δ)−integrable デ

$$(\delta)\int_{c}^{d}f(x)dx=(\delta)\int_{P}f(x)dx+\sum_n(\delta)\int_{\alpha_n}^{\beta_n}f(x)dx$$

以上ノ條件（I）及ビ（II）ニ於テ（D）-integral, ap. lim 及ビ(2)ノ代リニソレゾレ（D^*）-integral, lim 及ビ

$$\sum_n \omega(\delta^*, f; \alpha_n, \beta_n) < +\infty$$

ヲトルトキ、（δ^*）-integral ハ complete* デアルトイフ。コヽニ $\omega(\delta^*, f; \alpha_n, \beta_n)$ ハ（δ^*）-integral ノ（α_n, β_n）ニオケル oscillation トスル。

然ルトキ次ノ定理ヲ得ル。

定理4. （AD）-integral ハ（D）-integral ヲ含ム the weakest complete integral δ デアル。

定理4*. （AD^*）-integral ハ（D^*）-integral ヲフクム the weakest complete* integral δ^* デアル。

$\boxed{5}$ Ridder ガ（D）-integral 及ビ（D^*）-integral ヲ Perron ノ方法デ定義シタト同様ノ方法デ、（AD）-integral 及ビ（AD^*）-integral ヲ Perron ノ方法デ定義スルコトガ出來ル。