# 124. 或ル積分方程式ニ就テ

佐藤　常三（京大）

コレハ過日、日本數物學會年會講演デ渡辺義勝先生ガ——尤モ最一般ナル場合ノ証明ハ第一種フレドム積分方程式ノ一種ノ形トナリ

(A) $$\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x,t)\varphi(t,u)dt = \varphi(x,u)$$

茲ニ　$0 \leqq a \leqq u \leqq x_0 < x_1 < x_2 < x < +\infty$

但シ　$\varphi(x,u) = \frac{k}{x^k}(x-u)^{k-1}$

又ハ　$\frac{1}{x\Gamma(k)}\left(\log\frac{x}{n}\right)^{k-1}$　$(k>0)$.

上式カラ未知函數 $\lambda(x,t)$ ヲ求メネバナラヌガ未解決デアル云々————ト述ベラレテ誰カ鍵ヲ與ヘテ呉レト仰言ラレタガ、茲デ私ハ先生ニ鍵ヲオ渡シスルノヂヤナクテ、誰カニ私ノ下手ナ鍵ノ作リ方ニ對シテ御高評ガ願ヒタイ。

扨テ(A)ナル函数方程式ヲ在來ノ *Fredholm* 型トミルタメニハ点 $(x,t)$ ハ *square-domain* $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $x_1 \leqq t \leqq x_2$ ニナケレバナラナイノダガ，但シ書キヲミルトサウデナイ。

次ニ$u$ヲ parameter トミテ $\varphi(x,u)$ ヲ $u$ ノ一ツノ値ニ對スル固有函数トミレバ、其レガ屬スベキ核ハ $\lambda(x,t)$ デアルカラ、當然 $\lambda(x,t)$ ハ亦 parameter $u$ ノ函数デナケレバナラナイ、更ニ $\varphi(x,u)$ ノ形ヲミルト $0 \leqq u \leqq x_0 < x_1 < x_2 < x$ デアルカラ $u$ ニツイテハ常ニ Taylor's series ニ展開可能ト云フコトニナッテクルカラ (A) ナル等式関係ガ成立スルコトハ、怪シク思ハレテクル。

今函数 $\mathrm{K}(x,t)$ ガ $0 \leqq u \leqq t \leqq x < +\infty$ ナル triangular region デ define セラレタ連續函数トシテ

$$(1) \quad \int_u^x \mathrm{K}(x,t)(t-u)^\beta dt = (x-u)^\beta \qquad (\beta \neq 0,\ \beta > -1)$$

ナル如キ積分方程式(Volterra 型)ヲ考ヘル。コノ両辺ニ $(u-s)^\alpha du$ ヲカケテ $s$ カラ $x$ マデ積分スルト

$$\int_s^x (u-s)^\alpha du \int_u^x \mathrm{K}(x,t)(t-u)^\beta dt$$

$$= \int_s^x (x-u)^\beta (u-s)^\alpha du.$$

double integral ニ對スル Dirichlet's transformation ヲ利用スルト

$$\int_s^t (t-u)^\beta (u-s)^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-s)^{\alpha+\beta+1}$$

$(u = s + (t-s)\theta$ ニヨリ $u \to \theta$ デ行フ$)$

トナルカラ結局

$$\int_s^x \mathrm{K}(x,t)(t-s)^{\beta+\alpha+1}dt=(x-s)^{\beta+\alpha+1}$$

ソコデ特ニ $\alpha$ ヲ ($\alpha>-1$) シテ

$$\beta+\alpha+1=n \qquad (n:\ \text{non-negative integer})$$

ナル如ク適當ニエラムナラバ

$$\int_s^x \mathrm{K}(x,t)(t-s)^n dt=(x-s)^n.$$

コノ両辺ヲ $s$ ニツイテ $(n+1)$-*times-partial differentiation* ヲ行ヘバ

$$\mathrm{K}(x,s)=0$$

扨テ次ニ $\mathrm{K}(x,t)$ ヲ次ノ如クニ *define* シテミル。

$$\begin{cases} \mathrm{K}(x,t)=\mu(x,t) & \text{for} \quad x_1\leqq t\leqq x_2<x \\ \mathrm{K}(x,t)=0 & \text{for} \quad 0\leqq t<x_1, \\ \mathrm{K}(x,t)=0 & \text{for} \quad x_2<t \end{cases}$$

然ルトキハ上ノ積分方程式 (1) ハ

$$\int_u^x=\int_u^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\int_{x_2}^{x}=\int_{x_1}^{x_2}$$

デアルカラ

$$(2) \qquad \int_{x_1}^{x_2}\mu(x,t)(t-u)^\beta dt=(x-u)^\beta \quad \text{for any } x<u$$

トナル。

ソコデ冒頭ノ問題 (A) ニ立チ戻ッテミルト丁度 (2) ニ於テ

$$\mu(x,t)\equiv\frac{x^k}{t^k}\lambda(x,t)\qquad(0<x_1\leqq t\leqq x_2)$$

ニ相當スル。但シ $\beta=k-1$; $\beta>-1$ デアルカラ $k>0$.
殘ルトコロハ $\beta=0$ ∴ $e.\cdot k=1$. (trivial)

$\varphi(x,u)=\dfrac{1}{x\Gamma(k)}\left(\log\dfrac{x}{u}\right)^{k-1}$ トシテモ同樣結論サレル.

ソレハ $\log x$ ハ單調增加デアルカラ、ヤハリ上述ノ処作が可能トナル(全. 紙. 數. 談. 會第10号32、Abel's integral equation; 京大理學部紀要, Vol. 53, 1935, 同題; $(x)$ ノ代リニ $\log x$ ヲオク)何レニシテモ $k=1$ ナルトキ以外ハ等式関係が成立セナイコトニナルト思フ。