127. *Omoituita mama* IV

福原 満洲雄（北大）

Iroirona Jugô de Hude wo toru Hima ga nakatta node daibu gobusata site simatta. Kondo Bibunhôteisikiron no Kôgi wo suru node sono Genkô wo kaite iru to gûzen Atama ni ukanda no ga kore kara nobeyô to suru Kotogara de aru.

— 6 —

常微分方程式ノ解ノ單独條件ヲ求メルトイフ問題ハ南雲氏ノ研究（日本數學輯報，1926）以來特ニ我國ニ於テ盛ニ研究サレタ。始メノ間ハ特殊ナ形ノ單独條件ヲ求メテヰタノデアルガ、ソノ條件ヲ次第ニ擴張シヨウトスル企テガ行ハレ、自然ニ系統的ナ研究ニ発展シテ行ッタ、ソレデ今日デハ此ノ問題ハ落付クベキ所ニ落付イタヤウニ思ハレルノデアラウカ、兎ニ角数年來コノ方面ニ目新シイ研究ガ現ハレナクナッタ、実ハ私モ此ノ問題ニ格別ノ注意ヲ拂ハナイヤウニナッタノデアル、ソレヲココニ再ビ問題ニシヨウトスル理由ハ次ノ例デ了解サレルデアラウト思フ。

(1) $$\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}+a$$ （a ハ正ノ常數）

ノ解デ $y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル解ハ唯一ツデアルコトハ積分シナイデモ次ノヤウニ考ヘレバ分ル。$y_0 \neq 0$ ナラバ(1)ノ右辺ハ y_0 ノ近傍デ Lipschitz ノ條件ヲ満足スルカラ問題ニナラナイ、問題ニナルノハ $y_0=0$ ノ時デアル。ソコデ $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ ヲ共ニ $y(x_0)=0$ ヲ満足スル(1)ノ解デアルトスル。(1)ノ右辺ハ常ニ正デアルカラ其ノ解ハ(狭義ノ)増加函数デ、ソレガ取ル値ハ $-\infty$ カラ $+\infty$ マデ変化スル。

故ニ $\psi(x)$ ガ定義サレテ居ル區間——ソレハ實ハ $-\infty<x<+\infty$ デアル——ノ中ニ x_0 ト異ル任意ノ値 ξ ヲ取レバ、$\varphi(\xi')=\psi(\xi)$ デアルヤウナ ξ' ガ唯一ツ存在スル。$y=\varphi(x+\xi'-\xi)$ ハ $y(\xi)=\psi(\xi)$ ヲ満足スル(1)ノ解デ $x_0 \neq \xi$ ナル假定ニヨリ $\psi(\xi) \neq 0$ デアルカラ、解ノ單独性ニヨリ ξ ヲ含ミ且ツ $\psi(x) \neq 0$ デアルヤウナ區間デ

$$\varphi(x+\xi'-\xi)=\psi(x)$$

ナル關係ガ成立スル、ソノ區間ノ中カラ x ヲ x_0 ニ近ヅケルコトニヨリ

$$\varphi(x_0+\xi'-\xi)=\psi(x_0)=0$$

ヲ得ルカラ $\xi'=\xi$ デナケレバナラナイ。従ツテ $\varphi(x)=\psi(x)$ トナル。

以上デ(1)ニ關スル解ノ單独性——モット詳シク言ヘバ「(1)ニ關スル Cauchy ノ問題ノ解ノ單独性」デアル

ガ分リキッテ居ルカラ「Cauchy ノ問題ノ」ハ省略スル——ハ証明サレタノデアルガ、從來ノ單獨條件ハ(1)ニ應用出來ナイ、其ノ理由ハ簡單デアル。從來ハ

$$(2)\quad |f(x,y)-f(x,z)|<F(x,y-z)$$

ニ於テFトシテドンナ函數ヲトレバ

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ニ関スル解ノ單獨性ガ得ラレルカヲ調ベテ居タカラデアル、此ノヤウニシテ得ラレタ解ノ單獨條件ハ同時ニ

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=f(x,y)+a \qquad (a\text{ハ}x\text{ダケノ函數})$$

ニ関スル解ノ單獨條件ニモナル。併シ(1)ノ場合ニハ $a=0$ トスレバ解ノ單獨性ハ破レル、ココニ我々ガ見逃シテヰタ未開ノ地域ヲ見出スノデアル。

—Γ—

從來ノモノト異ッタ解ノ單獨條件——(1)ノヤウナ場合ニ利用サレル——ノ例ヲ紹介スルコトハ次ノ機會ニ讓ッテ、コノヤウナ問題ニ到達シタ經路ダケ述ベテ置キタイ。

求積法ニ於テハ X, Y ガ夫々 x,y ダケノ函數デアル時

$$(5)\quad X\,dx=Y\,dy$$

ナル微分方程式ノ解ハ

$$(6)\quad \int X\,dx = \int Y\,dy + Z\ y\hat{o}s\hat{u}$$

ナル形ニ書ケルトイフコトハ、ドンナ場合ニ正シイカヲ明瞭ニスルコトヲ怠ッテヰルヤウニ見エル、何ノ注意モナシニ(5)ヲ積分シテ(6)ヲ得ルトイフノハヨクナイ、何故カト云ヘバ(5)ハ

$$(7)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{X}{Y}$$

ヲ形式的ニ書換ヘタモノニ過ギナイカラ、dx, dyヲバラバラニ取扱フコトハ出來ナイカラデアル。ソコデ(5)カラ(6)ヘ移ルニハドウスルカト言ヘバ

$$\eta = \int_{y_0}^{y} Y\,dy$$

ナル変換ヲ行フノデアル、其ノ結果(7)ガ

$$\frac{dy}{dx} = X$$

トナルト言ヘルタメニハ $Y \neq 0$ デアレバヨイ、コレカラ

$$\eta = \int X\,dx + Z\ y\hat{o}s\hat{u}$$

ヲ得ル所ニハ問題ハナイ。故ニ $Y \neq 0$ デアルヤウナ範囲デハ(5)ノ解ハ(6)ナル形ニ書ケルノデアルカラ、形ノ上デハ(5)ノ両辺ヲ別々ニ積分シタヤウニナルガサウイフ経路デ(6)ガ得ラレルワケデハナイ、ソンナコトハ分ッテヰルト言

ハレレバソレマデデアルガ、ソレ程初等的デツマラナサウニ見エル所ニ案外見逃サレ勝チナ重要ナ問題ガヒソンデ居ルノデアル。

コヽデ注意スベキ事柄ハ $Y \neq 0$ ナラバ (7) ノ解ハ (6) ナル形ニ書ケル。從ッテ $y(x_0) = y_0$ ヲ滿足スル (7) ノ解ハ唯一ツニナルトイフコトデアル、所ガ $Y \neq 0$ トイフ假定ダケナラバ從來得ラレタ解ノ單獨條件ヲ滿タサナイヤウナ Y ガ取レル、此ノヤウニシテ前述ノ問題ニ導カレタノデアル、尤モ今迄ニ解ガ唯一ツデアルタメノ必要且ツ十分ナ條件ト言ハレルモノモ得ラレテ居ルガ、其等ハ余リニ漠トシタ結果デ實際ニ利用出來ナイカラ、ソノヤウナ條件ヲココデ問題ニシテヰルワケデハナイ。