128. *im Kleinen affine* 寫像ニ就テ

吉田 耕作, 角谷 静夫 (阪大)

解析函數ニヨル寫像即チ所謂等角寫像ハ *in Kleinen* ニ於テ *Ähnlichkeitstransformation* デアル。即チ

1) *im Kleinen* ニ於テ円ヲ *schlicht* ニ円ニ寫ス。

2) 但シ函數ノ定義領域内ニ集積セヌヤウナ除外点ニ於テハ *Schlichtheit* ハ破レルガ斯ル点ヲ中心トスル円ハ

其ノ寫像点デ algebraic ニ円ガ有限枚ツナガッタ Riemannsche Flächenstück ニ寫サレル（矢張リ im Kleinen ノ話デス）

偖テ上ノ im Kleinen ニ於テ円ガ円ニト云フコトヲ一般ニシテ円ガ楕円ニトシタモノヲ以下 im Kleinen affine ナ寫像ト呼ブ。（勿論適當ナ continuity ノ條件ヲ入レナケレバナラナイガ、ソノ詳細ハ又ノ機會ニユヅリマス）

函數論ニ於ケル elementary ナ多クノ定理ガ斯カル寫像ヲ與ヘル函數 $W=f(z)$ ニ於テモ成立スルコトハ言フ迄モアリマセン。

ココニハ斯ル寫像ニヨル一ツノ Verzerrungsprinzip ヲ述ベタイ。

$W=f(z)$ ニヨッテ z_0 ニ於ケル円ハ in Kleinen ニ於テ $w_0=f(z_0)$ ニ於ケル楕円ニナルガコノ楕円ノ長軸ト短軸ノ比ヲ $\gamma(z_0)\geqq 1$ トヲク。

定理. z平面ニ於ケル短形（一辺ノ長サ l, 他辺ノ長サ $|dz|$）ノ $W=f(z)$ ニヨル寫像ノ面積ヲ dA, l ノ寫像ノ長サヲ L トスルト

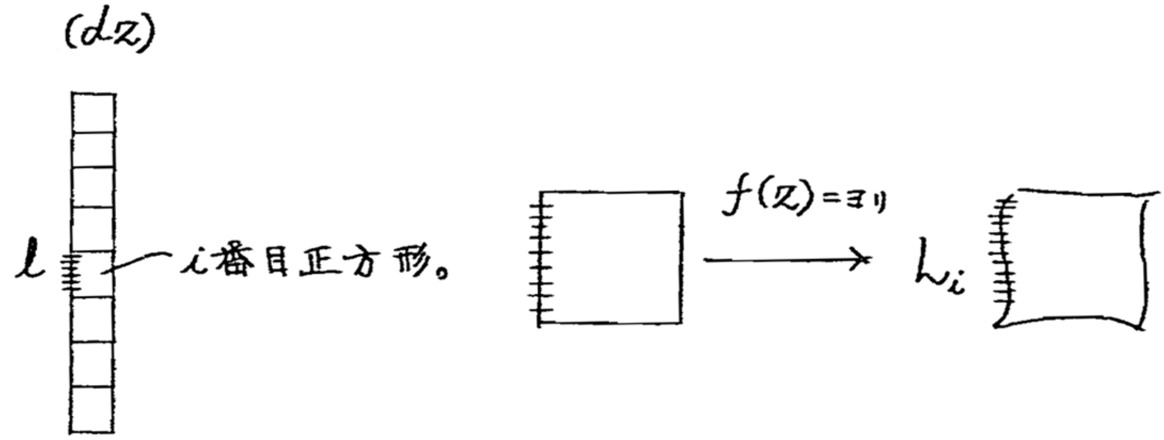
$$(1)\qquad dA \geqq \frac{L^2}{l\gamma}|dz|$$

但シ γ ハ矩形内ニ於ケル $\gamma(z_0)$ ノ maximum.

證. 矩形ガ正方形（一辺ノ長サ $|dz|$）$n=\dfrac{l}{|dz|}$ 個

カラ成ルトスル。各正方形ハ面積高々 $\frac{h_i^2}{r}$ ノ無限小矩形ニ寫サレル。

但シ h_i ハ $\sum_{i=1}^{n} h_i = h$ ヲ満足スル。（次圖ヲミヨ）



故ニ　$$dA \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i^2}{r} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

一方　$\sum_{i=1}^{n} h_i = h$ カラ Schwarz ノ不等式ニヨリ

$$h^2 \leqq n \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \frac{l}{|dz|} \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

依ッテ (1) ヲ得ル。（モット嚴密ニヤル可キダガ簡單ニ方針ノミ述ベマシタ）

式(1)ハ H. Grötsch ガ例ノ Modulgrösse ト云フ名前デ毎々使フ論法ヲ differentialform ニ書キ直シタモノニ過ギマセンガ。

之カラ例ヘバ L. Ahlfors ノ例ノ等角寫像論的豫備定理ニ相當スルモノモ（integration ニヨリ）im Kleinen affine 寫像ニ対シテモ得ラレマス。

従ッテ i.K.a. 寫像ヲ與ヘル函數ニ對スル Picard ノ定理, 或ヒハ Schlicht 函数ノ Verzerrungssatz 等色々ナモノガ得ラレルト思ヒマス。何レモ少シマトマッテカラ御高見ヲ伺フ積リデス。

最近 C.R. ニ Lavrentieff ガ presque analytique function ト云フモノニツイテ種々重要ナ結果ヲ得テヲリマスが之ハ結局 i.K.a. 寫像ノ理論デアリマセウ.

兎ニ角幾何學的函數論?ヲ微分幾何學的?ニ擴張シテ行ケバ面白イコトニナルダラウト筆者等ハ考ヘテヲリマス。