131. 佐藤氏ノ注意ニ就テ

渡邉 義勝（横浜高工）

先般ノ數物大會デ私ノ提出シタ積分方程式

即チ (A) $\int_{x_1}^{x_2}\lambda(x,t)\varphi(t,u)dt=\varphi(x,u)$,

茲ニ $0\leqq a\leqq u\leqq x_0<x_1<x_2<x<+\infty$

但シ $\varphi(x,u)=\frac{k}{x^k}(x-u)^{k-1}\quad(k>0)$

等トシテ未知函數 $\lambda(x,t)$ ヲ求ムトイフ問題ハ $k=1$ ナル場合ノ外ハ成程佐藤氏（本紙第39号124）ノ指摘サレタ様ニ解不能ナルモノデシタ。尤モ佐藤氏ガ $x_1\leqq x\leqq x_2$ デナイカラ上式ハ Fredholm 型トハイハレナイトサレタ点ハ少シ當ラナイノデシテ (A) ノ中ノ x ハ全然 parameter トシテ姑ク ignore シテモ宜シイ。核ハ実ニ積分符号下ニアル $\varphi(t,u)$ デアッテ $\lambda(x,t)$ デハアリマセヌ。尚茲ニ $a\leqq u\leqq x_0$ デアッテ普通ノヤウニ $x_1\leqq u\leqq x_2$ デハナイトイフコトハ私モ一度不覺ニ左様思ッタコトデシタガ或ル席上（上ノ積分方程式トハ申サナイデ御尋ネシタトキニ）掛谷先生カラ夫レハ一次変換ニヨリ（即チ、ココデハ

$$v=\frac{(x_0-u)x_1+(u-a)x_2}{x_0-a}$$

トオケバ體ニ $x_1\leqq v\leqq x_2$ トナル）parameter u ヲ v ニ換ヘサヘスレバ宜イデハナイカト Hint ヲ頂イタコトデシタ。

サテ私自身ノ不能ノ証明ハ次ノ通リデス。

假定ニヨリ (A) ノ左辺ニテ

$$\varphi(t,u)=\frac{k}{t}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{k-1}=\frac{k}{t}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{k-1}{m}\left(\frac{-u}{t}\right)^{m}$$

ハ一様收斂トナルカラ積分ト集和トノ順序ヲ換ヘテモ宜イ。同様ニ (A) ノ右辺モ u/x ノ冪級数ニ展開ナシ得。両辺ニ於ケル u ノ同次冪ノ係数ヲ比較スレバ（且ツ公約数ヲ去レバ）

$$\int_{x_1}^{x_2}\lambda(x,t)\frac{dt}{t^{m+1}}=\frac{1}{x^{m+1}} \qquad (m=0,1,2,\cdots\cdots)$$

デナケレバナラヌ。然ルニ上式ハ m ノ或二ツノ値ニ對シテスラ既ニ聯立不可能デアル。其ノ故ハ上式ヲ少シ書キ換フレバ

$$(1)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\frac{x^{m+1}}{t^{m+1}}\lambda(x,t)\,dt=1$$

トナリ，又ソノ m ノ値ノ一ツ少イ場合ヲ少シ書キカヘルト

$$(2)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\frac{x^{m+1}}{t^{m+1}}\lambda(x,t)\,t\,dt=x$$

トナル。然ルニ (1) ハ明カニ

$$y=\frac{x^{m+1}}{t^{m+1}}\lambda(x,t)$$

ナル曲線ト t 軸ト $t=x_1$，$t=x_2$ トノ間ニアル部分ノ面積ヲ表ハシ、(2) ハ其ノ面積ノ重心ノ t-座標ヲ表ハス。

故ニ後者ハ勿論 x_1 ト x_2 トノ間ニアルベク決シテ $x(>x_2>x_1)$ 等デハアリ得ナイ。 従ッテ (1) ト (2) トハ聯立不可能ニシテ一方正シクバ他ハ不合理タルベク、結局 (A) ハ $\varphi(x,u)$ ノ展開ガ唯タ二項ダケトナル場合、即チ $k=2$ ナル場合ニスラ既ニ不可能タル方程式デアル。況ンヤ k ガ任意正実数ナル如キ場合ハ尚更不可能デアル。

茲ニ佐藤氏ノ與ヘラレタ注意ニ對シテ深謝シ、又吟味不足ニシテ不束ナル問題ヲ提出シタコトニツキ大方諸氏ニ御詫シ、併セテ私自身ノ不明ニツキ慚愧ニ堪ヘマセン。

ダガ Lösch 氏 (Math. Zeitschr., 37 (1933), S.77-) ハ数列ノ場合ニ就イテ上ノト類似ナ関係カラ未知項 $\lambda_{\rho}^{(n)}$ ヲ求メ得テヰルノデアッテ、之レニツケテモ代数解析ト積分解析トノ間ニハ越ユベカラザル溝渠ガアルヤウニ私ニハ痛感サレマス。 ——(五月三日)——