136. im Kleinen affine 寫像ニ就テ II.

吉田耕作，角谷静夫（阪大）

前論 128 ヲ精シク・シテミタイ。

<u>定義1.</u>　xy 平面ノ開領域ニ於テ定義サレタ一組ノ一價連續函數 $u(x,y)$, $v(x,y)$ が次ノ條件ヲ滿足スルトキニ寫像 $(x,y)\longrightarrow(X,Y)$, $X=u(x,y)$, $Y=v(x,y)$ ヲ im Kleinen affine デアルト呼ブ。

(i)　D ニ於テ u_x, u_y, v_x, v_y が連續

(ii)　$J(x,y)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \geqq 0$.

但シ $u\equiv const$,　$v\equiv const$

ノ場合ヲ除キ J ノ零點ハ D 内ニ集積シナイ。（$\geqq 0$ ヲ $\leqq 0$ デ置キカヘテモヨイが以下 $\geqq 0$ ノミヲ考ヘル）

(iii) $J \neq 0$ ナル点ノ近傍デハ上ノ寫像ハ schlicht デアルガ $J(x_0, y_0)=0$ トスルト (x_0, y_0) ヲ中心トスル充分小サナ円ハ $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$ ニ於テ algebraic ニ分岐シタ Riemannsche Flächenstück ニ schlicht ニ寫サレル。

條件(iii) ハ (i), (ii) カラ多分導カレルト思ヒマスガ今ノ所ハ簡單ノタメニ (iii) ヲモ假定シテオキマス。

定理 1.

$$(1) \quad p(x,y) = \frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{J(x,y)}$$

ニヨッテ定義サレル $p(x,y)$ ハ $J \neq 0$ ナル点デハ連續ニシテ且ツ $\geqq 2$ デアル。$J(x,y) \neq 0$ ナル点ニテハ

$$(2) \quad u_x^2+v_x^2 \leqq q(x,y)J(x,y)$$

ココニ q ハ $q+\frac{1}{q}=p$, $q \geqq 1$ ニテ定義サレル函数デ $J \neq 0$ ナル点デハ連續デアル。尚 (2) ニ於テ等号ノ成立スルノハ $u_y^2+v_y^2=\frac{1}{q}J(x,y)$ ナルトキニ限ル。

證明. $E=u_x^2+v_x^2$, $F=u_xu_y+v_xv_y$,

$$G=u_y^2+v_y^2$$

トオケバ (1) ハ

$$(3) \quad \frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}} = p = q+\frac{1}{q}$$

ト書ケルカラ $p \geqq 2$。(ii) ニヨリ $J \neq 0$ ナル点デハ，$E \neq 0$, $G \neq 0$ ダカラ

$$q+\frac{1}{q}\geqq\frac{\frac{E}{G}+1}{\sqrt{\frac{E}{G}}}=\sqrt{\frac{E}{G}}+\sqrt{\frac{G}{E}}.$$

即チ $q^2\geqq\frac{E}{G},\ \frac{G}{E}.$

之レヲ (3) ニ代入シテ

$$q+\frac{1}{q}\geqq\frac{E+\frac{E}{q^2}}{J}=\frac{E}{J}\left(1+\frac{1}{q^2}\right).$$

故ニ　$q\geqq\frac{E}{J}$,　同ジク　$q\geqq\frac{G}{J}$.

(3)ヨリ. $\frac{E}{J}=q$ ノトキハ $\frac{G}{J}=\frac{1}{q}$.

定義2. 上ノ如キ u, v ニヨッテ定メラレル複素函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad z=x+iy$$

ヲ D ニ於テ pseudo-regular デアルト呼ブ (Lavrentieff ノ presque analytique ト結局同ジデアリマセウ)。一般ニ複素函数 $f(z)$ ガ $z=z_0$ ヲ中心トスル充分小サナ円ノ中デ pseudo-regular ナラバ $f(z)$ ハ z_0 ニ於イテ p. r. ナリト云フ。同様ニシテ pseudo-meromorphic モ定義デキル。

定理2. $f(z)$ ガ D ニ於テ p. r. ナラバ $f(z)$ ノ λ 方向ノ微分 $f_\lambda(z)$ ハ

(4)　$|f_\lambda(z)|^2\leqq q(x,y)J(x,y)$

ヲ満足スル。但シ等号ガ成立スルノハ λ ニ直角ナ μ 方向

ノ微分ガ $\left|f_u(z)\right|^2=\dfrac{J(x,y)}{q(x,y)}$ ヲ満足スルトキニ限ル。

証明. 定理1ヨリ明カ。

即チ $f(z)$ ニヨリ im Kleinen ニハ円ガ楕円ニ写サレソノ長軸, 短軸ノ長サノ比ガ $q(x,y)$ ニヨリ與ヘラレルノデアル。

定理3. $w=f(z)$ ヲ p.r., $F(w)$ ヲ regular トスレバ $G(z)=F(f(z))$ ハ矢張リ p.r. デ且 $f(z)$ ト $G(z)$ トハ $q(x,y)$ ヲ同ジクスル。

証明. 明カ。

定理4. (Generalisation of Grötzsch's theorem)

一辺ノ長サ y, 他辺ノ長サ dx ナル infinitesimal ニ細長イ矩形 R ノ内部及ビ周上ヲコメテ p.r. ナ $f(z)$ ニヨリ R ガ area dA ナル領域ニ写サレタトスルト

$$(5)\qquad \frac{dA}{dx}\geq\frac{L^2}{qy}$$

但シ $q=\max\limits_{\text{in }R} q(x,y)$, $L=\int_y\left|f_y(z)\right|dy$。ココニ等号ノ成立スルノハ R ニ於テ $\left|f_y(z)\right|^2\equiv\text{const}=qJ(x,y)$, $J(x,y)\equiv\text{const}$ ノトキニ限ル。

証明. $L=\int_y\left|f_y(z)\right|dy$ ヨリ Schwarz ノ不等式及ビ (4) ヲ用ヒテ

$$L^2 \leqq y\int_y |f_y(z)|^2 dy \leqq yq\int_y J(x,y)\,dy = yq\frac{dA}{dx}.$$

等号ノ成立スル場合ノ議論ハ明カデス。

(5)ヲ用ヒテ Ahlfors ノ等角寫像論的豫備定理が拡張サレマスが次ノ機会ニ譲ッテ (5) ノ應用例ヲ二ッ述ベテヲキマス。コノ中定理 6 ハ Lavrentieff ノ論文ニ証明ナシデ述ベラレテアルモノデス。

定理 5. (Generalisation of Koebe's "Viertelsatz")

単位円 $|z|<1$ ニ於テ pseudo-regular ナ $f(z)$ が

α) $f(0)=0, \quad \lim\limits_{z\to 0}\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \geqq 1$

β) $|z|<1$ ニ於テ schlicht

ヲ満足スルナラバ, $w=f(z)$ ニヨル $|z|<1$ ノ Bild ノ中ニハ円

(6) $$|w| < \lim_{r_0\to 0}\frac{r_0}{4}\, e^{\int_{r_0}^{1}\frac{dr}{r\,q(r)}} = d$$

が含マレル。但シ $q(r) = \max\limits_{|z|=r} q(x,y)$

証明. $w=f(z)$ ニヨル $|z|<1$ ノ Bild ノ Rand ヲ S トスル。w 平面ノ原点ヲ通ル直線(正實軸トナス角 θ)が始メテ S ニ交ハルマデノ長サヲ $d_1(\theta)$ トスル。$\min\limits_{\theta} d_1(\theta)$

$=d_1$ トシ且ツコノ d_1 ハ $\theta=0$ ノトキ attain サレル モノト假定スル。$d_1 \geqq d$ ナルコトヲ證明スレバヨイ。

偖テ d_1 カラ正實軸ニ沿フテ cut ノ入ッタ w 平面ヲバ $w=\dfrac{-4d_1 z_1}{(1-z_1)^2}$ ノ逆函數ノ一ツノ分枝 $z_1=F(w)$ ニヨッテ單位円 $|z_1|<1$ ニ寫スコトガデキル。ヨッテ必要アラバ適當ニ Schlitz ヲ入レテ幾ツカノ domain ニ分割サレタ $|z|<1$ ヲ $F(f(z))$ ニヨッテ schlicht ニ $|z_1|<1$ ノ内部ニ寫スコトが出來ル。Schlitz ハ $z=0$ ノ近傍ニハナク且ツ又

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{F(f(z))}{z}\right|=|F'(0)|\lim_{z\to 0}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\geqq\frac{1}{4d_1}$$

デアル。

今 $|z|<1$ ヲ log ニヨッテ Band $B:(z=re^{i\theta})\log r<0$, $|\theta|<\pi$ ニ寫ス。log ノ一ツノ分枝ヲトレバ Schlitz ノ入ッタ B ハ $\log F(f(z))$ ニヨッテ Band $B_1:(\log F(f(z))=\log r_1+i\theta_1)$, $\log r_1<0$, $\underset{\log r_1}{\text{Variation}}\ \theta=2\pi$ ノ一部分ニ Schlicht ニ im Kleinen affine ニ寫サレル。此ノ寫像ニ (5) ヲ應用スレバ（q ハ定理3ニヨリ变ラナイ）

$$2\pi\left(\log\frac{1}{\dfrac{r_0}{4d_1}}-\varepsilon\right)\geqq\int_{\log r_0}^{0}\frac{(2\pi)^2}{2\pi\, q(r)}\,d\log r$$

但シ正數 ε ハ $r_0 \to 0$ ナルトキ 0 ニ收斂スルモノトスル。
之ヨリ

$$d_1 \geqq \lim_{r_0 \to 0} \frac{r_0}{4} e^{\int_{r_0}^{1} \frac{dr}{r g(r)}} = d.$$

<u>定理6.</u> (Generalisation of Picard's theorem)

$f(z)$ ヲ $0<|z|\leqq 1$ ニ於テ pseud regular トシ且ツ $z=0$ ハ $f(z)$ ノ essential singular point トスル。即チ

$$\alpha)\quad \lim_{z_i \to 0} f(z_i) = a,\quad \lim_{z'_i \to 0} f(z'_i) = b,\quad a \neq b \text{ ナル}$$

如キ点列 $\{z_i\}$, $\{z'_i\}$ ガ存在スル。

然ラバ

$$\beta)\quad \lim_{r_0 \to 0} \int_{r_0} \frac{dr}{r g(r)},\quad g(r) = \max_{|z|=r} g(x, y)$$

ガ diverge スルトキハ，$f(z)$ ハ高々二ツノ有限値ヲ除イテ全テノ有限値ヲ $0<|z|<1$ デトル。

証明。$f(z)$ ガ $0<|z|<1$ ニ於テ $0, 1$ ナル値ヲトラナイトスル。コノトキ矛盾ガ云ヘレバヨイ。

$f(z)$ ニヨル $0<|z|<1$ ノ Bild デアル点ノ Riemann 面 R ハ二重連結ダカラ之レヲ regular schlicht ニ円環

$$(1)\quad \bar{r}^* < |z_1| < \bar{r}$$

ニ寫セル。但シ $|z_1| = \bar{r}^*$ ハ $z=0$，$|z_1| = r$ ハ $|z|=1$

ノ Bild ニナル様ニ。 $\overline{r} = finite$ ナコトハ、モシ $\overline{r} = \infty$ トスルト R ヲ上ノ円環(7)ニ寫ス函数 $z_1 = F(z)$ ノ逆函数 $z = F^{-1}(z_1)$ ハ $z_1 = \infty$ ヲ essential singular point ニスルコトニナル。然シ R ハ $0, 1, \infty$ ヲ Rand point ニスルカラ Picard ノ定理ニ反スル。同様ニシテ α) ヲ用ヒテ $\overline{r}^* > 0$ 。ヨツテ $\overline{r} = finite$, $\overline{r}^* > 0$. 故ニ $\overline{r} = 1$, $\overline{r}^* > 0$ ト假定シテ差支ヘナイ。

結局正則函数 F ヲ用ヒテ $z_1 = F(f(z))$ ナル pseudregular ナ函数ガ作レテ（定理3ニヨリ $f(z)$ ト g ヲ同ジクスル） $0 < |z| < 1$ ガ schlicht ニ $0 < \overline{r}^* < |z_1| < 1$ ニ寫サレルノデアル。

定理5ニ於ケルト同様ニ log ト(5)ヲ應用スレバ

$$2\pi \log \frac{1}{\overline{r}^*} \geqq \int_{\log r_0}^{0} \frac{(2\pi)^2 d \log t}{2\pi\, g(t)}, \quad r_0 > 0$$

左辺ハ有限, 右辺ハ $r_0 \to 0$ ノトキ β) ニヨリ ∞ トナルカラ矛盾デアル。

此ノ他種々函数論ノ結果ガ一般化サレルデアリマセウ。例ヘバ Schwarz ノ Lemma ヲ擴張スルコトモ応角微係數ノ議論モ出來マセウ。之等ハ順次マトマリ次第ニ本紙上ニ述ベサセテ頂ク積リデアリマス。定理5, 6ニ於テ

$$\int \frac{d \log r}{g}$$

ノ如キ量ノ入ッテクルノハ注目スベキコトデ, ココニAhlfors

ノ初メタ〝例ノ方法〟ノ意味ヲ扱取ルコトガ出来ヌウカト思ヒマス。

Literature

1. H. Grötzsch: Ber. der Sachs. Acad. Wiss., 80, 1928, p. 503.

2. M. Lavrentieff: Sur une classe de representation continues, C. R. No 12, Tome 200, 1935.

3. L. Ahlfors: Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung usw. Aca Fennicae A, I, NO. 9, 1930.