

140. 函数ノ多葉性ニ関スル注意

木村 邦五郎 (東京物理學校)

次ノ定理ハ本誌30号ノ拙論ノ定理1ヲ幾分一般化シタモノデアリマスガ、コノ方面ノコトハ尾崎氏が種々研究サレテ居ラレマスノデ或ヒハ次ノ定理ニ発表サレテキルカモ知レマセンガ *Sci Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A*, 2 (1935), 167—188 マデニハ見當ラヌ様ニ思ヒマスノデ (本質的ニハ合マレテキルカモ知レマセンガ) 次ニ述ベルコトニシマス。

定理. $f(z)$ ガ凸範圍 D デ正則デ、亦 $P_n(z)$ ハ n 次ノ多項式デソ、零點ハ悉ク D ニ屬スルモノトシ、且 $n (\geq 0)$, $p (> 0)$ ヲ整数,

$$\Re \left\{ e^{i\omega} \frac{d^{\pi+p}}{dz^{\pi+p}} (P_n(z) f(z)) \right\} > 0, \quad (\omega: \text{実常数})$$

ナラバ $f(z)$ ハ D デ高々 p 葉デアレ。

証明. $P_n(z) = a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$, ($a \neq 0$)

トスレバ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ハ D = 属ス。 (コノ場合 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ノイクツカツツガ等シクテモヨロシイ)

今 $F(z) = e^{i\omega} P_n(z) f(z)$ トオキ $\Delta_{\frac{1}{F}}(z, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots, \alpha_1)$ ヲ
 $F(z)$ = ヲイテノ連差商 (本紙 30号 拙論) Δ ト同シ意味
 トシマスト

$$e^{i\omega} a f(z) = \Delta_{\frac{1}{F}}(z, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1) \\
 = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 F^{(n)}(z') t_1^{n-1} t_2^{n-2} \dots t_{n-1} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$z = z' = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})t_1 t_2 \dots t_{n-1} \\
 + (z - \alpha_n)t_1 t_2 \dots t_n \text{ デアル}$$

上式ノ右ノ等式ハ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z$ ガ凸領域 D = ヲクシ
 且ツ $F(z)$ ガ D デ正則デアレエトヨリ本誌 30号 補助定理(拙
 論) ヲリ得ラレ、又上式ノ左ノ等式ハ次ノコトヨリ認メラレ
 マス、即チ $F(\alpha_1) = 0$ ナレコトヲ用ヒテ

$$\Delta_{\frac{1}{F}}(z, \alpha_1) = \frac{F(z) - F(\alpha_1)}{z - \alpha_1} = \frac{F(z)}{z - \alpha_1} = e^{i\omega} a (z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) f(z)$$

$$\Delta_{\frac{1}{F}}(z, \alpha_2, \alpha_1) = \frac{\frac{F(z)}{z - \alpha_1} - \left(\frac{F(z)}{z - \alpha_1}\right)_{z=\alpha_2}}{z - \alpha_2} = \frac{F(z)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)} \\
 = e^{i\omega} a (z - \alpha_3) \dots (z - \alpha_n) f(z)$$

$$(\alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ デ } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ デ } \left(\frac{F(z)}{z - \alpha_1}\right)_{z=\alpha_2} = 0 \text{ トナリマスカラ})$$

この事ヲ能クテ行クコト = ヨツテ上式ノ成立スルコトガ分リ
マス。次 =

$$f_1(z) = e^{i\omega} a f(z) \quad \text{トオケバ}$$

$$\Delta_{f_1}^p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 F^{(n+p)}(z') t_1^{n+p-1} t_2^{n+p-2} \dots$$

$$\dots t_{n-1}^{p+1} t_n^p u_1^{p-1} u_2^{p-2} \dots u_{p-1} dt_1 dt_2 \dots dt_n du_1 \dots du_p$$

ココ = z_1, z_2, \dots, z_{p+1} $\in D$ 内ノ任意ノ点ヲ又

$$z'_k = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})t_{n-1}$$

$$+ (z'_k - \alpha_n)t_n$$

$$\text{トシ } z' = z'_1 + (z'_2 - z'_1)u_1 + \dots + (z'_{p+1} - z'_p)u_p$$

デアル。

$$\text{コノコトハ } \frac{d^p}{dz^p} F^{(n)}(z') = t_1^p t_2^p \dots t_n^p F^{(n+p)}(z') + \text{ルコ}$$

トト上記補助定理 (本誌 30号ノ) ヲ用ヒテ容易ニ得ラレマ
ス。

$$\text{最後ノ式ト假説 } \Re \left\{ e^{i\omega} \frac{d^{n+p}}{dz^{n+p}} (P_n(z) f(z)) \right\} > 0 \quad (\text{即チ}$$

$$\Re \{ F^{(n+p)}(z) \} > 0) \quad \text{ヨリ } \Re \{ \Delta_{f_1}^p(z_{p+1}, z_p, \dots, z_1) \} > 0$$

ガ得ラレ、コレヨリ $f_1(z)$ ガ D デ高々 p 葉、從ツテ

$$\frac{f_1(z)}{a e^{i\omega}} = f(z), \quad (a e^{i\omega} \neq 0 \text{ ナル定数ナルカテ}) \quad \text{ガ } D \text{ デ高々 } p \text{ 葉}$$

トナリマス。

コレヲ級数ノ形ノ定理ニシテ見マス

$$\text{系. } f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots \quad \text{ガ } |z| < r$$

デアレバ

$$b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n \quad (b_n \neq 0) \quad \text{ノ零点が悉ク } |z| < r = \text{合マ}$$

レ、且ツ

$$\begin{aligned} & |b_n a_p + b_{n-1} a_{p+1} + \dots + b_0 a_{n+p}| \\ & \geq \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+p+k}{n+p} |b_n a_{p+k} + b_{n-1} a_{p+k+1} + \dots \\ & \quad \dots + b_0 a_{p+k+n}| r^k \end{aligned}$$

ナラバ $f(z)$ ハ $|z| < r$ デ高々 p 葉デアル。

係数 = 適當ノ條件ヲツケタラ 或ハ面白い結果が出ルカモ知レマセン。

以上ハ私達ノサマヤカナ 數學研究 (森本清吾先生御指導ノ下 = 平野幸太郎氏ト私デアツテキル) デ5月10日 (金曜日) = 得タモノデアス。

次學ナ私ノコトデアスカラ 何か誤ツテキル所ガアルカモ知レマセンガ、モシソウデアツタラ 御教示下サル様 諸氏 = 御願ヒ 致シマス。

—— (5月16日) ——