153. Fatou ノ定理ニ對スル小サナ注意

吉田　耕作（阪大）

$|z|<1$ デ正則ナ函數 $f(z)$ ガ有界ナラバ，$f(z)$ ハ次ノ性質（以下之ヲ性質Fト名ヅケル）ヲ有スル。

高々 measure 0 ナル θ ノ集合ヲ除イテ $\lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})$ ガ存在スル。

之有名ナ Fatou ノ定理ヲ証明スルノニ普通ハ Poisson 積分カラ出發スルガ、$f(z)$ ニヨル $0\leqq r<1,\ \theta=\theta_0$ ノ Bild ノ長サ $l(r,\theta_0)=\int_0^r |f'(re^{i\theta_0})|\,dr$ ガ $r\to 1-0$ ナルトキ有限ナ極限ヲモテバ明ニ $\lim\limits_{r\to 1-0} f(re^{i\theta})$ ハ exist スルカラ，

r ノ増加函数 $l(r,\theta)$ ガ高々 measure 0 ナル θ ノ集合ヲ除イテ r ニツイテ有界（其ノ Schranke ハ θ ニ depend シテモヨイ）ナルコトガ云ヘレバ Fatou ノ定理ガ証明サレ同時ニ其ノ幾何學的意味ガ明ニナル訳デアルガ

$f(z)$ ノ有界性カラ上ノコトハ出ソウモナイ。

ソコデ $f(z)$ ノ有界性ノ代リニ

$$S(r)=\int_0^r\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta<M,\quad r<1$$

ヲ假定スレバ *Schwarz* ノ不等式ヨリ

$$\int_0^{2\pi}\{l(r,\theta)-l(r_0,\theta)\}^2 d\theta\leqq\int_0^{2\pi}\left\{\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t}\int_{r_0}^{r}|f'(te^{i\theta})|^2 t\,dt\right\}d\theta$$

$$\leqq 2\pi\log\frac{r}{r_0}\cdot S(r)\leqq 2\pi M\log\frac{1}{r_0}.$$

$l(r,\theta)$ ハ r ノ増加函數ダカラ之ヨリ

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\{l(r,\theta)-l(r_0,\theta)\}^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\lim\{l(r,\theta)-l(r_0,\theta)\}^2 d\theta\leqq 2\pi M\log\frac{1}{r_0}$$

ヲ得テ高々 *measure* 0 ナル θ ノ集合ヲ除イテ $\lim\limits_{r\to 1-0} l(r,\theta)$ ノ有限ナコト、從ツテ $f(z)$ ガ性質 F ヲ有スルコトガワカル。

上ノ長サ，面積ノ代リニ *spherical* ナ長サ，面積ヲ用フレバ，$f(z)$ ガ $|z|<1$ デ *meromorphic* ナ時ニモ

$$A(r,f)=\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{|f'(te^{i\theta})|^2}{(1+|f(te^{i\theta})|^2)^2}t\,dt\,d\theta$$

ノ有界性ヲ假定スレバ $f(z)$ ガ性質 F ヲ有スルコトヲ示セル。

所デ *Nevanlinna* ハ Fatou ノ定理ヲ使ツテ $T(r,f)$ ガ有界ナル如キ $f(z)$ ガ性質 F ヲ有スルコトヲ示シ

デアルカラ、上ニヤツタコトハ Nevanlinna ニヨツテ擴張サレタ Fatou ノ定理ノ特別ナ場合ヲ取扱ツタニ過ギナイ。$\left(T(r,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^r \frac{A(t,f)}{t}dt\right.$ ダカラ$\left.\right)$

所シ等角寫像論等デ屢々出會フ，$f(z)$ が單葉或ヒハ複葉ナル場合ナドハ Fatou ノ定理ニ立戻ラズ上ノ如ク証明シタ方が簡單デモアルシワカリヤスイト思ヒマス。尚上ノ証明方針ヲ適當ニ modify スレバ Fatou ノ定理ハ得ラレルノデアツテ、コノ定理が陳述シテヰル essential ナ意味？ハソコニ見出サレルノデハナイデセウカ。