154. 南雲氏ノ問題ニ就イテ(I)

北川 敏男 (阪大)

1. *Linear translative functional transformation* ニ関スル展開問題 ——南雲氏ノ問題ニ就イテ. 次ノ如キ結果ヲ得マシタ。

〔假定 I_1〕 $\varphi(t)$ ハ有限區間 $a \leqq t \leqq b$ ニテ有界変分デアリ、茲デ

$$\varphi(t) = s(t) + g(t)$$

ココニ, $s(t)$ ハ各 t_i ニテ *spring* $A_i (\neq 0)$ ヲモチ他デハ常数ニナルヤウナ、到ルトコロ右ニ連續ナ階段函数デアルトスル。(但シ $a < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_n < b$)

又連続函数 $g(t)$ ニ関シテハ，$g'(t)$ ガ存在シテ且ツ $g'(t)$ ガ全連続デアルトスル。

〔假定 I_2〕　$g'(b) \neq 0, \quad g'(a) \neq 0$

〔假定 II_1〕　函数 $f(x)$ ハ區間 $[2a, 2b]$ デ Lebesgue 積分可能デアル。

〔假定 II_2〕　$f(x)$ ガ一点 x_0（但シ $a < x_0 < b$）ニテ有界変分デアルトスル。

然ル時ニハ

〔主張〕　点 x_0 ニ對シテ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{1}{G(\lambda)}\left\{\int_a^b e^{\lambda(x_0+\eta)}\left(\int_0^\eta e^{-\lambda t} f(t)\,dt\right) d\varphi(\eta)\right\} d\lambda$$

$$\longrightarrow \quad \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

但シ　$G(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t}\, d\varphi(t)$。

又 $\{C_n\}$ ナル閉曲線系列ノトリカタハ後述スル如ク適當ニトルノデアルガ、ソレハ $G(\lambda)$ ノミニ関係シテトレル（x_0 ノ値ニハ無関係デアル）。

注意：　$a < 0 < b$ トシテオク。

注意：　"假定" ハ、数物常會（大阪支部）デ述ベタ其ノ侭ノ形ヲ採用シタ。シカシモツト拡張出來ルガ後述ニ譲ル。

2. 豫備定理 1.（Titchmarsh）$\psi(t)$ ガ有限區間 $q \leqq t \leqq p$ ニテ Lebesgue 積分可能ナラバ

$$\int_q^p e^{\lambda t}\psi(t)\,dt = o(e^{\lambda p}) \quad (R\lambda \geqq 0 \text{ ニテ})$$

$$= o(e^{\lambda q}) \quad (R\lambda \leqq 0 \text{ ニテ})$$

豫備定理2.（*Langer*）$\psi(t)$ ガ有限區間 $q \leqq t \leqq p$ ニテ全連續ナラバ

$$\int_q^p e^{\lambda t}\psi(t)\,dt = \frac{[\psi(p)]e^{\lambda p} - [\psi(q)]e^{\lambda q}}{\lambda}$$

但シ $[\psi(p)] = \psi(p) + o(1)$, $[\psi(q)] = \psi(q) + o(1)$ （λ ノ函數トシテ $|\lambda| \to \infty$ ノトキ）

豫備定理3. 次ノ如キ閉曲線系列 $\{\mathbb{C}_n\}$ ヲツクリ得ル。

1° $\mathbb{C}_n \subset \mathbb{C}_{n+1} \subset \mathbb{C}_{n+2} \subset \mathbb{C}_{n+2} \subset$ -------

2° $\mathbb{C}_n$ ト原点トノ距離ハ n ト共ニ限リナク増ス。

3° $\mathbb{C}_n = \underset{(\mu \geqq 0)}{\mathbb{C}_n^{(+)}} + \underset{(\mu \leqq 0)}{\mathbb{C}_n^{(-)}}$ （即チ虚軸ニヨッテ分タレタ二ツノ部分）トオクトキ

$$S_\pm(n,r) = \int_{\mathbb{C}_n^{(\pm)}} \frac{e^{\lambda r}}{\lambda \int_a^b e^{\lambda t}\,d\varphi(t)}\,d\lambda$$

ニツイテ次ノ事ガ成立スル：

A_1: $\lim_{n\to\infty} S_-(n,r) = 0$ （$r > a$ ノトキ）

A_2: $\{S_-(n,r)\}$ ハ有界 （$r = a$ ノトキ）

B_1: $\lim_{n\to\infty} S_+(n, r) = 0$ 　($r < b$ ノトキ)

B_2: $\{S_+(n, r)\}$ ハ有界 　($r = b$ ノトキ)

系: $a < r < b$ ニシテ $h(\lambda) = O(e^{\lambda r})$ ナラバ

$$\oint_{\mathbb{C}_n} \frac{h(\lambda)}{\lambda \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda \to 0 \quad (n \to \infty \text{ ノトキ})$$

豫備定理4. 豫備定理3ト同ジ $\{\mathbb{C}_m\}$ ニ関シテ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_m} \frac{W_i(\lambda, \delta) \int_\beta^b e^{\lambda t} d\varphi(t)}{\lambda \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda \to \frac{1}{2}$$

但シ $W_1(\lambda, \delta) \equiv 1$

$W_2(\lambda, \delta) \equiv 1 - e^{-\lambda\delta}$ 　$(0 < \delta < \beta - a)$

$W_3(\lambda, \delta) \equiv e^{\lambda\delta} - 1$ 　$(0 < \delta < b - \beta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_m} \frac{w_i(\lambda, \delta) \int_a^\alpha e^{\lambda t} d\varphi(t)}{\lambda \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda \to \frac{1}{2}$$

但シ $w_1(\lambda, \delta) \equiv 1$

$w_2(\lambda, \delta) \equiv 1 - e^{\lambda\delta}$ 　$(0 < \delta < b - \alpha)$

$w_3(\lambda, \delta) \equiv e^{-\lambda\delta} - 1$ 　$(0 < \delta < \alpha - a)$

3. 豫備定理3, 4ノ証明ノ荒筋

假定I_1, I_2 ガアルカラ、豫備定理1, 2ヲ用キテ

$$\lambda G(\lambda) = [g'(b)] e^{\lambda b} - [g'(a)] e^{\lambda a} + \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}$$

ヲ得ル。カヽル exponential sum ノ零点ノ分布ニ関シテハ二三ノ研究ガ知ラレテヰル。今、Wilder: Transaction American Math. Soc. 18 ニ於ケル結果ヲ参照スルナラバ次ノ如キコトガ云ヘル。

(i) $R\lambda \leqq 0$ ニテ、$|\lambda|$ ガ充分大ナルトキニハ

$(i)_1$ $R\lambda \geqq -K_0$ ニテハ

λ ガ $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}=0$ ノドノ根ヨリモ $\delta(>0)$ 以上離レテヰルトキニハ、正数 K_δ ガアツテ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq K_\delta |\lambda e^{\lambda t_1}|$$

$(i)_2$ $R\lambda < -K_0$ ニテハ

λ ガ $\lambda + \dfrac{-g'(a)}{A_1} e^{-\lambda(t_1-a)}=0$

ノドノ根カラモ $\delta(>0)$ 以上離レテヰルトキニハ正数 H_δ ガアツテ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq H_\delta |\lambda e^{\lambda t_1}|$$

$(i)_3$ $(i)_2$ ニテ特ニ, $|\lambda| \leqq \left|\dfrac{g'(a)}{A_1} e^{-\lambda(t_1-a)}\right| e^{-\sigma}$ ナル範囲ニテハ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq P_\delta (1-e^{-\sigma}) |e^{\lambda a}| \quad (P_\delta \text{ ノ意味ハ前述ニ同ジ})$$

(ii) $R\lambda \geqq 0$ ニテ $|\lambda|$ ガ充分大ナルトキニハ

$(ii)_1$ $R\lambda \leqq K_0$ ニテハ, λ ガ $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}=0$ ノドノ根カラモ $\delta(>0)$ 以上離レテヰルトキニハ, 正数 S_δ ガアツテ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq S_\delta |\lambda e^{\lambda t_n}|$$

(ii)$_2$　$R\lambda > K_0$ ニテハ，λガ

$$\lambda+\frac{g'(b)}{A_n}e^{-\lambda(t_n-b)}=0$$

ノドノ根カラモ $\delta(>0)$ 以上離レテヰルトキニハ，正數 T_δ ガアッテ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq T_\delta |\lambda e^{\lambda t_n}|$$

(ii)$_3$　(ii)$_2$ ニテ特ニ，

$$|\lambda| \leqq \left|\frac{g'(b)}{A_n}e^{-\lambda(t_n-b)}\right|e^{-\sigma}$$

ナル範囲ニテハ

$$|\lambda G(\lambda)| \geqq W_\delta(1-e^{-\sigma})|e^{\lambda b}|$$

（W_δ ノ意味ハ前述ニ同ジ）

注意：　K_0 ハ $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}$ ノミニヨッテキマルモノデアル。即チ $|R\lambda| \geqq K_0$ ニテハコノ exponential sum ハ零点ヲ有シナイヤウナ K_0 デアル――カヽル $K_0(<\infty)$ ハ確カニ存在スル。

更ニ、問題ノ exponential sums ノ零点ニ関シテハ次ノコトガ容易ニ分カル。

1° $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}$ ノ零点ニツイテ

矩形 R：$\begin{cases} y_1 \leqq \nu \leqq y_2 \\ -K_0 \leqq \mu \leqq K_0 \end{cases}$

ニ属スル零点ノ個数ヲ $n(R)$ トスレバ（Wilder: loc. cit.）

$$-n+\frac{t_n-t_1}{2\pi}(y_2-y_1)\leqq n(R)\leqq n+\frac{t_n-t_1}{2\pi}(y_2-y_1)$$

コノ，Wilder ノ定理カラ矩形Rニテ、ドノ零点カラモ或数，例ヘバ

$$\frac{y_2-y_1}{4\left(n+\frac{t_n-t_1}{2\pi}(y_2-y_1)\right)}$$

ヨリ大ナル距離ヲ，ドノ零点ニ関シテモ，有スルトコロノ直線 $\nu=y$ ヲ引ケル。

2°　$\lambda+\frac{-g'(a)}{A_1}e^{-\lambda(t_1-a)}$ ノ零点ニツイテ（$R\lambda\leqq 0$）

$\lambda=\mu_m+i\nu_m$ ガコノ零点ニナルタメノ必充ハ

$=\rho_m e^{i\phi_m}$

$$(\alpha)\quad \nu_m^2=\left|\frac{g'(a)}{A_1}\right|^2 e^{-2\mu_m(t_1-a)}-\mu_m^2$$

$$(\beta)\quad \phi_m=\theta_1-\nu_m(t_1-a)+2m\pi\qquad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$$

ナル二式ヲ同時ニ充スコトデアル

但シ　$\theta_1=Arg\left\{\frac{-g'(a)}{A_1}\right\}$

依ツテ任意ノ正数 ε ニ對シテ $m\geqq N_1(\varepsilon)$ ナルトキ

$$\nu_m=\frac{2m\pi+\theta_1-\frac{\pi}{2}+\varepsilon_m}{t_1-a}\qquad(|\varepsilon_m|<\varepsilon)$$

$$\nu_{-m}=\frac{-2m\pi+\theta_1+\frac{\pi}{2}+\varepsilon'_m}{t_1-a}\qquad(|\varepsilon'_m|<\varepsilon)$$

$(m=N(\varepsilon),\ N(\varepsilon)+1,\cdots\cdots\cdots)$

トナル。

3° $\lambda+\dfrac{g'(b)}{A_n}e^{-\lambda(t_n-b)}$ ノ零点ニツイテ（$\Re\lambda\geqq 0$ ニテ）

$\lambda=\mu_m+i\nu_m=\rho e^{i\phi_m}$ ガ零点ニナルタメニハ

$$(\alpha)\quad \nu_m^2=\left|\frac{g'(b)}{A_n}\right|^2 e^{-2\mu_m(t_n-b)}-\mu_m^2$$

$$(\beta)\quad \phi_m=\theta_2-\nu_m(t_n-b)+2m\pi\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

ナルコトガ必充デアル。

但シ $\theta_2=\mathrm{Arg}\left\{\dfrac{g'(b)}{A_n}\right\}$

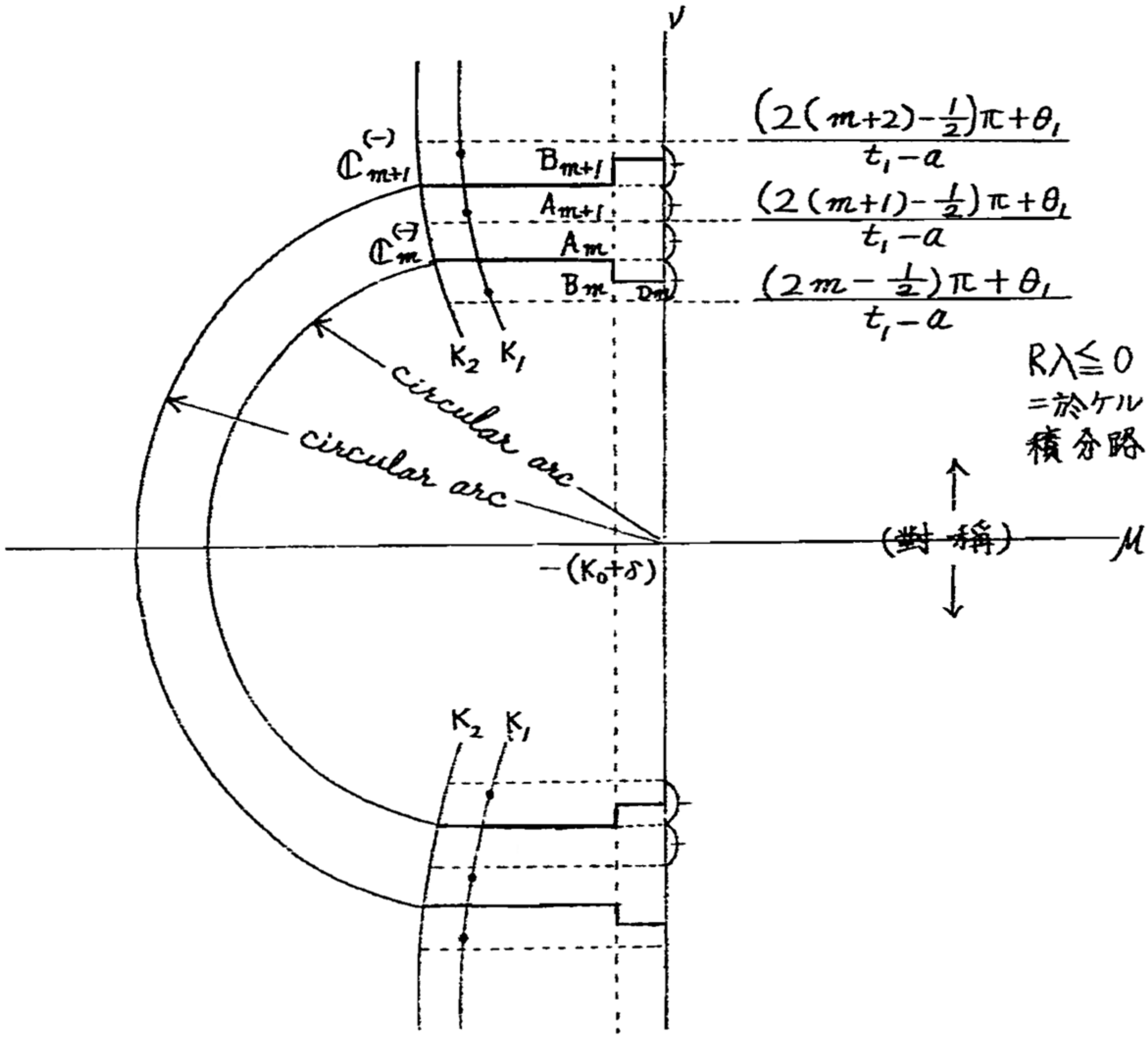
依ツテ任意ノ正数 ε ニ對シテ $m\geqq N_2(\varepsilon)$ ナルトキ

$$\nu_m=\frac{2m\pi+\theta_2-\frac{\pi}{2}+\varepsilon''_m}{t_n-b}\quad (|\varepsilon''_m|<\varepsilon)$$

$$\nu_{-m}=\frac{-2m\pi+\theta_2-\frac{\pi}{2}+\varepsilon''_m}{t_n-b}\quad (|\varepsilon''_m|<\varepsilon)$$

トナル。

以上デ準備ハ了ッタ。コレカラ $\{\mathbb{C}_n^{(-)}\}$ ノツクリカタハ次図ノ如クスレバヨイコトガワカル。



注意 1°　$R\lambda \leqq 0$ ニ於ケル積分路ハ，μ 軸ニ関シテ線對稱デアルコト。

注意 2°

曲線 K_1:　$$|\lambda| = \left| \frac{g'(a)}{A_1} e^{-\lambda(t_1-a)} \right|$$

曲線 K_2:　$$|\lambda| = \left| \frac{g'(a)}{A_1} e^{-\lambda(t_1-a)} \right| e^{-\sigma} \quad (\sigma > 0)$$

注意 3°

$$A_m = -(K_0+\delta) + i\,\frac{(2m+1-\frac{1}{2})\pi+\theta}{t_1-a}$$

A_m カラ μ 軸ニ平行線ヲ引イテ C_m ハキマル。

注意：　矩形 R_m：$\begin{cases} \dfrac{(2m-\frac{1}{2})\pi+\theta_1}{t_1-a} \leqq \nu \leqq \dfrac{(2(m+1)-\frac{1}{2})\pi+\theta_1}{t_1-a} \\ -K_0 \leqq \mu \leqq K_0 \end{cases}$

ニ関シテ、前述ノ Wilder ノ定理ヲ適用スルト $\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}$

ノドノ零点カラモ

$$\frac{2\pi}{4(t_1-a)\left(n+\dfrac{(t_1-a)(t_n-t_1)}{2\pi}\right)}$$

ヨリ大ナル距離ヲ有スルヤウナ μ 軸ニ平行ナ線分ガ引ケル、

コレノ　$R\lambda=-(K_0+\delta)$ トノ交ハリヲ B_m トスル

$R\lambda=K_0+\delta$ トノ交ハリヲ E_m トスル

コノ線分ハ，ν 軸ヲバ，

$$\frac{(2s-\frac{1}{2})\pi+\theta_2}{b-t_n} \leqq \nu \leqq \frac{(2(s+1)-\frac{1}{2})\pi+\theta_2}{b-t_n}$$

ナル區間ニ等分シテオクトキ

必ズ何番目カニ入ル．ソノ番号ヲ s トスレバ

点 E_m カラ直線 $R\lambda=K_0+\delta$ 上ヲバ上ルカ又ハ下ルカシテ

点　$K_0+\delta+i\dfrac{(2s+1-\frac{1}{2})\pi+\theta_2}{b-t_n}$ ＝達スル。（コレヲ F_m トス）

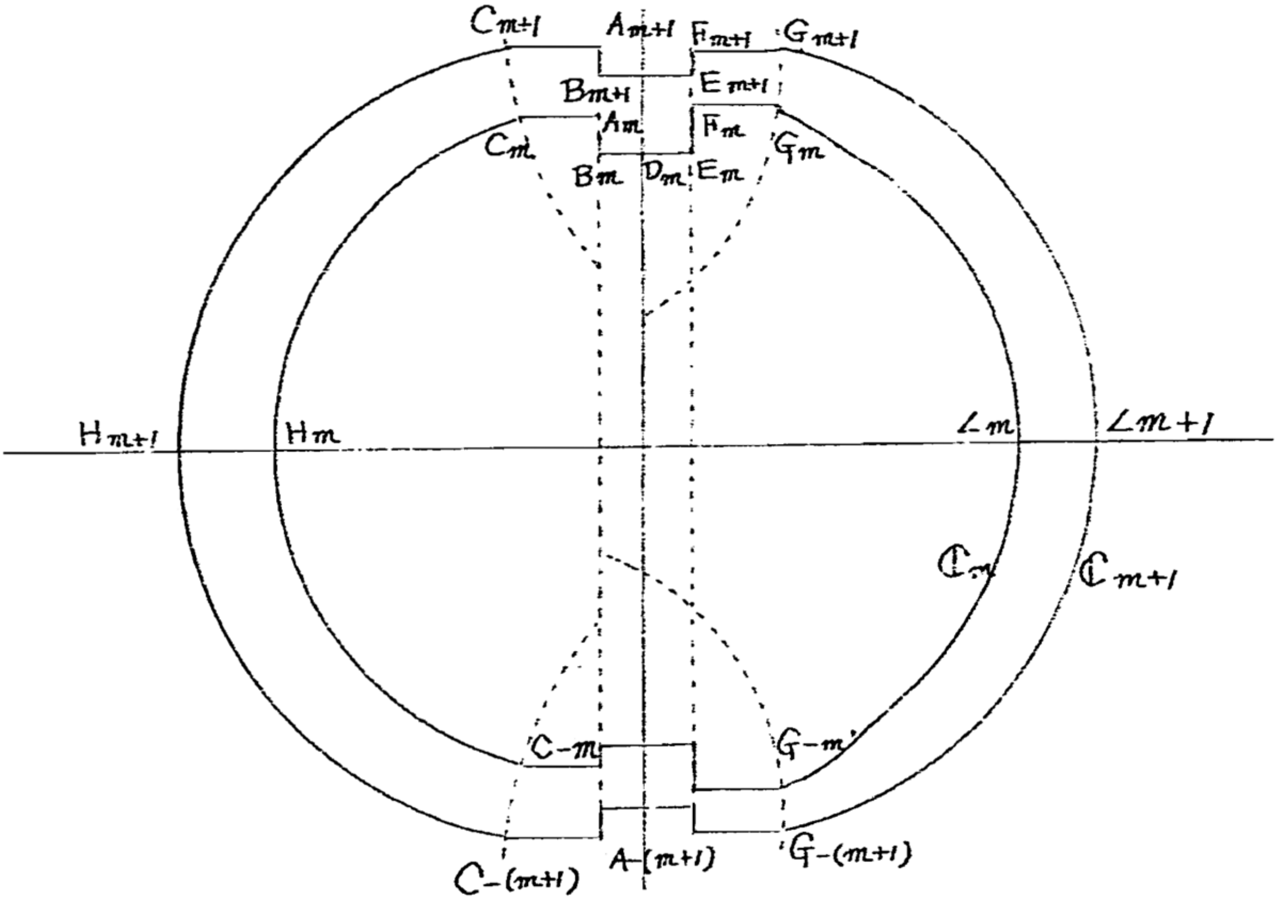
ソレカラ　$\nu=\dfrac{(2s+1-\frac{1}{2})\pi+\theta_2}{b-t_n}$ ＝沿フテ

μ 軸＝平行＝

曲線 $|\lambda|=\left|\dfrac{g'(b)}{A_n}e^{-\lambda(t_n-b)}\right|e^{-\sigma}$　$(\sigma>0)$

ニ交ハルトコロマデ至ル。コレヲバG_mトス。

第Ⅳ象限ニテハ第Ⅰ象限トμ軸ニ関シテ對稱ナ図形ヲツクル。G_mニ對稱ナ点ヲバG_{-m}トスレバ，原点Oヲ中心トシ$\overline{OG_m}$ヲ半径トスル円周デG_mトG_{-m}トヲ結ブコトニ由リ、積分路ハ完成スル。



注意：　今ツクツタ積分路ノ各点ハ

$$\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda t_i}, \quad \lambda + \frac{g'(b)}{A_n} e^{-\lambda(t_n - b)} \quad (R\lambda \geqq 0\ ニオケル)$$

$$\lambda - \frac{g'(a)}{A_1} e^{-\lambda(t_1 - a)} \quad (R\lambda \leqq 0\ ニオケル)$$

ドノ零点カラモ

$$\delta = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{t_1-a},\ \frac{1}{2}\frac{\pi}{b-t_n},\ \frac{2\pi}{4(t_1-a)\left(n+\frac{(t_1-a)(t_n-t_1)}{2\pi}\right)}\right)$$

$$>0$$

以上ノ距離ニアルコトハ明カデアル —— ソレ故ニ前述ノ abschätzung ガ適用サレル.

次ニ $\mathbb{C}_m^{(-)}$ 上ノ積分ノ評價ヲ行フ:

(i) $$\left|\int_{D_mB_m}\frac{e^{\lambda r}}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t}d\varphi(t)}d\lambda\right|$$

$$\leqq \int_0^{-(K_0+\delta)}\frac{e^{\mu r}}{K\delta|\nu|\,e^{\mu t_1}}d\mu = \frac{1}{K\delta|\nu|}\int_0^{-(K_0+\delta)} e^{\mu(r-t_0)}d\mu$$

(ii) $$\left|\int_{B_mA_m}\frac{e^{\lambda r}}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t}d\varphi(t)}d\lambda\right| \leqq \frac{e^{-(K_0+\delta)(\nu-t_1)}}{K\delta|\nu|}\ \frac{2\pi}{t_1-a}$$

(iii) $$\left|\int_{A_mC_m}\frac{e^{\lambda r}d\lambda}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t}d\varphi(t)}\right| \leqq \frac{1}{H\delta|\nu|}\int_{-(K_0+\delta)}^{-\tau} e^{-\mu(q-t_1)}d\mu$$

$$= \frac{1}{H\delta|\nu|(q-t_1)}\left\{e^{-\tau(q-t_1)} - e^{-(K_0+\delta)(q-t_1)}\right\}$$

茲ニ $|\nu|^2 = e^{-2\sigma}\left|\dfrac{g'(a)}{A}\right|^2 e^{2\tau(t_1-a)} - \tau^2 \quad (\tau>0)$

ニヨリ ν ニ對シテ τ ハキマル。

依ッテ $$\frac{e^{-\tau(r-t_1)}}{|\nu|} \leqq \frac{1}{Ce^{-\sigma}}\frac{e^{-\tau(r-t_1)}}{e^{\tau(t_1-a)}} = \frac{1}{Ce^{-\sigma}}e^{(a-r)\tau}$$

(iV) $$\left|\int_{\widetilde{C_m H_m}} \frac{e^{\lambda r}}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda\right|$$

$$\leqq \frac{1}{P_\delta(1-e^{-\alpha})}\left|\int_{\widetilde{C_m H_m}} \left|\frac{e^{\lambda r}}{e^{\lambda a}}\right| |d\lambda|\right|$$

(i), (ii) ハ $|\nu|\to\infty$ ノトキ常ニ零ニ tend シ

(iii) ニテハ　$a<r$ ナラバ　零ニ tend シ

$a=r$ ナラバ　高々有界

(iV) ニテハ　$a<r$ ナラバ　零ニ tend シ

$a=r$ ナラバ　高々有界

B_1, B_2 モ同様デアル，系ハ従ッテ明ラカデアル。

又 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_m} \frac{W_1(\lambda,\delta)\int_\beta^b e^{\lambda t} d\varphi(t)}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mathfrak{C}_m^{(-)}} + \int_{\mathfrak{C}_m^{(+)}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_m^{(-)}} \frac{\int_\beta^b e^{\lambda t} d\varphi(t)}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_m^{(+)}} \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_m^{(+)}} \frac{\int_a^\beta e^{\lambda t} d\varphi(t)}{\lambda\int_a^b e^{\lambda t} d\varphi(t)} d\lambda$$

コヽニ，第一，第三ノ積分ハ A, B ニヨリ零ニ tend スルカラ全体ハ $\frac{1}{2}$ ニ tend スル。

$W_2(\lambda,\delta)=1-e^{-\lambda d}$ ヲ $W_1(\lambda,\delta)$ ノ代リニオクト

$$e^{-\lambda d}\int_{\beta}^{b} e^{\lambda t}d\varphi(t) = O\left(e^{\lambda(b-\delta)}\right) \quad (R\lambda \geqq 0 ニテ)$$

$$= O\left(e^{\lambda(\beta-\delta)}\right) \quad (R\lambda \leqq 0 ニテ)$$

ソレ故　$a<\beta-\delta<b-\delta<b$

ナル限リ

$$\oint_{\mathfrak{C}_m} \frac{e^{-\lambda\delta}\int_{\beta}^{b} e^{\lambda t}d\varphi(t)}{\lambda\int_{a}^{b} e^{\lambda t}d\varphi(t)}\,d\lambda \longrightarrow 0$$

又　$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_m}\frac{e^{\lambda\delta}-1}{\lambda G(\lambda)}\int_{\beta}^{b} e^{\lambda t}d\varphi(t)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\mathfrak{C}_m}\frac{e^{\lambda\delta}}{\lambda}-\oint\frac{e^{\lambda\delta}}{\lambda G(\lambda)}\int_{a}^{\beta} e^{\lambda t}d\varphi(t)\,d\lambda - \oint\frac{\int_{\beta}^{b} e^{\lambda t}d\varphi(t)}{\lambda G(\lambda)}\,d\lambda\right]$$

$$e^{\lambda\delta}\int_{a}^{\beta} e^{\lambda t}d\varphi(t) = O\left(e^{\lambda(\beta+\delta)}\right) \quad R\lambda \geqq 0 ニテ$$

$$= O\left(e^{\lambda(a+\delta)}\right) \quad R\lambda \leqq 0 ニテ$$

$a<a+\delta<\beta+\delta<b$ ナラシメテオケバ中央ノ積分ハ零ニ tend スルカラ、求メル結果ヲ得ル。

残リモ全ク同様ニ証明サレル。　　　――(続ク)――