158. Closure ニ関スル一定理

泉　信一（東北大）

$\{y^n\}$ ガ任意ノ區間ニ於テ L^2-closed ナコトハヨク知ラレテヰル、之ヲ無限區間ノ場合ニ擴張スルノガ本論文ノ目的デアル。

1. $\delta(y)$ ガ $(0, \infty)$ デ定義サレタ正函數デ

$$\delta(y) \geqq \frac{A}{1+y^\varepsilon}, \quad y>0 \tag{1}$$

トナル樣ナ $A>0$ 及ビ $\varepsilon>0$ ガ存在スルトシ，且ツ $y \to \infty$ ノトキ $\delta(y) \downarrow 0$ トスル。

任意ノ有限區間デ二乘ガ可積分デ且 $|y| \to \infty$ ノトキ

$$f(y) = O(e^{-|y|\delta(|y|)}) \tag{2}$$

ヲ滿足スル函數 $f(y)$ ノ class ヲ $\mathcal{Y}$ トスル．從ッテ $\mathcal{Y} \subset L^2(-\infty, +\infty)$.

$f(y) \in \mathcal{Y}$ ニ對シテ

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^n f(y)\,dy = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{3}$$

ガ成立スルトキ，$f(y)$ ガ null（乃チ殆ンドスベテノ点デ零ニ等シイ）ナラバ，$\{y^n\}$ ハ $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathfrak{Y}$ ニ關シテ closed デアルトイフ。

定理．$\{y^n\}$ ガ $(-\infty, +\infty)$ ニ於テ $\mathfrak{Y}$ ニ關シテ closed ナルタメノ必要且ツ十分ナ條件ハ

$$\int_0^\infty \frac{\delta(y)}{1+y}\,dy \tag{4}$$

ノ發散スルコトデアル。

之レト同種ノ定理ガ，本年四月ノ年會デ竹中博士ニヨッテノベラレタ。竹中博士ノハ de la Vallée Ponesin ノ方法ヲ用ヒルノデアル。
コノ定理ハ Ingham, Journ. London Math. Soc., 9 (1934), pp. 29—32 ニ含マレテヲル。次ニ Ingham ニナラッテ定理ヲ証明シヨウ。

2. 豫備定理．(4) ガ收斂スルトキ，任意ノ區間 (a, b) ニ對シテ

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{xyi}\, dy \tag{5}$$

ガ (a, b) ニ於テ null デナク且ツ (a, b) 外デハ恒等的ニ零トナルヤウナ $f(y) \in \mathfrak{Y}$ ガ存在スル。

証明ハ Ingham ノ前述ノ論文 p. 29 ノ下カラ二行目ニ始マリ、次頁ノ下カラ八行目ニ終ル。

定理ノ條件ノ必要ナコトヲ示スタメニ，(4) ガ收斂スル

トスル．然ルトキ豫備定理カラ，(5) ガ (a, b) $(b>a>0)$ ノ外デ恒等的ニ零デ，(a, b) デハ null デナイヤウナ $f(y) \in \mathfrak{Y}$ ガ存在スル．從ッテ $f(y)$ ハ null デナイ．更ニ

$$g^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (iy)^{\nu} f(y) e^{xyi} dy \qquad (6)$$

及ビ

$$0 = g^{(\nu)}(0) = \frac{i^{\nu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\nu} f(y)\, dy \qquad (6')$$

故ニ $\{y^n\}$ ハ closed デナイ．故ニ定理ノ條件ハ必要デアル。

次ニ定理ノ條件ノ十分ナコトヲ示スタメニ，(3) ガ成立シ且ッ (4) ガ發散スルトスル。更ニ (1) カラ

$$\delta(y) \geqq \frac{2}{y^{\varepsilon}}, \qquad y > 1$$

トシテモヨイ．然ルトキ $|y| \to \infty$ ナラバ

$$f(y) = O\left(e^{-2|y|^{1-\varepsilon}}\right) \qquad (7)$$

(2) 及ビ (6) カラ

$$|g^{(\nu)}(x)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\nu} \cdot |f(y)|\, dy \leqq \mathrm{K} \int_{0}^{\infty} y^{\nu} e^{-y\delta(y)} dy$$

$$= \mathrm{K} A_{\nu}, \text{ say}.$$

コヽニ K ハ定數デアル。

今 $\alpha > \frac{1}{1-\varepsilon}$，$\nu_1 = \nu^{\alpha}$ トオクトキ，(2) 及ビ (7) カラ

$$A_\nu = \int_0^{\nu_1} + \int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y\delta(y)} dy$$

$$\leqq \nu_1 \int_0^{\nu_1} y^{\nu-1} e^{-y\delta(\nu_1)} dy + e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}} \int_{\nu_1}^{\infty} y^\nu e^{-y^{1-\varepsilon}} dy$$

$$< \nu_1 \int_0^{\infty} y^{\nu-1} e^{-y\delta(\nu_1)} dy + \frac{e^{-\nu_1^{1-\varepsilon}}}{1-\varepsilon} \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{-y} dy$$

$$< \nu_1 \left(\frac{\nu}{\delta(\nu_1)} \right)^\nu + \left(\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon} e^{-(1-\varepsilon)\frac{\nu_1^{1-\varepsilon}}{\nu+\varepsilon}} \right)^{\frac{\nu+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

右辺ノ第一項ハ $\nu \to \infty$ ノトキ ∞ トナリ，第二項ハ 0 ニ近ヅク、故ニ

$$A_\nu \leqq \left(\frac{2\nu}{\delta(\nu^\alpha)} \right)^\nu, \quad \nu \geqq \nu_0$$

トナル様ナ ν_0 ガアル。

然ルニ (4) ノ発散スルコトカラ

$$\int_1^\infty \frac{\delta(u^\alpha)}{u} du$$

ガ発散スル．故ニ $\delta(u)$ ノ単調減少ナコトカラ，$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\delta(\nu^\alpha)}{\nu}$ モ発散シ，従ツテ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{A_\nu}}$ モ亦発散スル．故ニ Denjoy ノ定理カラ $g(x)$ ハ quasi-analytic デアル．故ニ (3) 及ビ (6') カラ $g(x)$ ハ恒等的ニ零デ，従ツテ $f(x)$ ハ null デアル。