163. Berandete h-Mannigfaltigkeit ノ Homologiegruppe ニ就テ

小松醇郎（阪大）

Berandete Mannigfaltigkeit ニ就イテ一般的ナ性質ハ Wesentlich ナモノヲ求メルノハ容易ナコトデハナイ．此処ノモノハ今迄ニ此ノ方面デ得ラレテ居ル結果，Mayer-Vietoris ノ関係式；Pontrjagin ノ Dualitätssatz 等ヲ適当ニ組ミ合セタモノニ過ギナイ。

Berandete h-Mannigfaltigkeit M_1^{n+1} ノ境界 m 個ノ n 次元閉集合体 M_i^n カラ成ルトスル．M_1^{n+1} ノベッチ数 p^r, M_i^n ノベッチ数 p_i^r，且ツ M_i^n デハ homolog 0 トナラナイ Zyklus デ M_1^{n+1} デハ homolog 0 トスル Zyklus ガ作ル群ノベッチ数（階級, rank）γ^r トスル．

定理 I. $\sum_{i=1}^{m} p_i^r = \gamma^r + \gamma^{n-r}$

証明. M_1^{n+1} ト homöomorph ナモノヲ持ッテ来ル、此ノ M_2^{n+1} ト M_1^{n+1} ト境界デ夫々對應スル点ヲ等シイ点ダト考ヘレバ一ッノ閉集合体 M^{n+1} ガ生ズル、コノベッチ数 q^r トシテオク。

扨テ境界 M_i^n ノ Homologiegruppe ハ M^{n+1} デハ M^{n+1} ノ Homologiegruppe ノ unter Gruppe = homomorph = abbilden サレル。
ソノ Homomorphism ノ Kern ノ Gruppe ノ rank ガ γ デアル。

次＝ $M^{n+1}-M_i^n$ ノ Homologiegruppe ヲ考ヘルト $M^{n+1}-M_i^n$ ハ homöomorph ナ二ッノモノ M_1^{n+1}, M_2^{n+1} ＝分カレル、此ノ r 次元 Homologiegruppe ガ M^{n+1} デソノ Homologiegruppe ノ untergruppe = homomorph = abbilden スルトキノ Kern ハ M_1^{n+1}, M_2^{n+1} ノ Zyklus デニッ境界ヲ合セタトキ一致スル奴、所デ M_1^{n+1} ハ $p^r \geqq \sum p_i^n - \gamma^r$ デアッテ $\sum p_i^r - \gamma^r$ ノ Rank ダケハ確＝ M_1^{n+1} デ homolog 0 デナイ。

ソレ故 $M_1^{n+1}+M_2^{n+1}$ ノトキ $\sum p_i^r - \gamma^r$ ダケガ homolog 0 トナル.
Pontrjagrin ノ Dualitätssatz ＝ヨレバ

$$\gamma^{n-r} = \sum_{i}^{i=m} p_i^r - \gamma^r$$

以上

定理 II. $p' \geqq \sum p_i' - \gamma'$, 特＝三次元集合体ナラバ(上

記定理 $n=1$） $p' \geqq \frac{1}{2}\Sigma p_i'$

証明. *Trivial.*

定理 III.

1). $p' \geqq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i' - \gamma^2 - (m-1)\right)$

2). $q^r = p^r + p^{n-r+1}$

3). $p^r - p^{n-r+1} = \gamma^{n-r} - \gamma^{r-1}$

4). n even $2\chi(M_1^{n+1}) = \chi(M_i^n)$

n odd $2\chi(M_1^{n+1}) = \chi(M^{n+1})$

此處ニ χ ハ *Euler-Poincarésche Charakteristik* ヲ表ハス。

証明. $M_1^{n+1} + M_2^{n+1} = M^{n+1}$ ナル *Verdoppelung* ＝ *Mayer Vietoris* ノ関係ヲ考ヘレバ

$$q^r = 2p^r - \Sigma p_i^r + \gamma^r + \gamma^{r-1}$$

1) ハ $\gamma^0 = m-1$, $q' \geqq 0$ ヲ入レレバ直チニ出ル.

2) ハ $q^r = q^{n-r+1}$ 及ビ定理 I ヲ使ヘバ

$$2q^r = q^r + q^{n-r+1} = 2p^r + 2p^{n-r+1}$$

3) ハ $q^r - q^{n-r+1}$ ヨリ出ル.

4) ハ $\sum_{r=0}^{n+1}(-1)^r q^r$ ヲ作ツタ結果ニ過ギナイ。

終リニ書キ加ヘテ置クベキハ昨年七月本紙上數學談話會第二号デ一寸取扱ツタ *H. Seifert* ノ定理（*Math. Zeit* 35 *Bd.*）ノ擴張ハ此処ノ定理 II デアツテ、ソノマ

マノ形デ高次元ノ場合ニ擴張ハ出來ナイ、アソコデハ何故カ $\gamma^r = \gamma^{2n-r}$ トシタ誤ニ基ヅク。

尚ホソノ第2号デ取扱ッタ $p' = \frac{1}{2}\sum p_i'$ ヲ attain スル example ノ証明シ方甚ダ下手。要スルニユークリッド3次元空間ノ中デ m 個ノ任意ノ閉曲面デ境セラレタ空間部分ノ一次元ベッチ數 $p' = \frac{1}{2}\sum_i^m p_i'$ デアルガ、ソノ証明ハ Knoten ノ Aussenraum ノ Homologiegruppe ヲ求メル方法ヲ少シ modify スレバヨイノデ唯ノ演習問題ニ過ギナイ。

尚又ソコデ書イテオイタコト即チ $p' = \frac{1}{2}\sum p_i'$ ヲ attain スル berandete Raum ハ斯様ナモノニ限ルカト云フノデアルガ、ソレハ限ラナイコト明カデアル、三次元ユークリッド空間ノ中ニ einbetten 出來タモノニ任意ノ一ツノポアンカレ空間ヲ所謂 Vereinigung スレバモハヤ R^3 デ realisieren スルコト不可能、且ベッチ数ハ変ラナイ。

ポアンカレ空間トハ任意ノ Zyklus ガ homolog 0 トナリ而モ三次元球 S^3 トハ homöomorph デナイモノ、例ハイクラデモアル。

Vereinigung トハ im Kleinen デ Vollkugel ヲ両方デ一ツヅツ取リ除キ Rand トシテノ球面ヲ二ツ identifizieren スルコト。