175. 或ル積分方程式ニ就テ

石橋　榮（関西學院）

方程式

$$\int_0^\infty e^{-tz}(z+\varphi(t))f(t)\,dt=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニ於テ t ハ實変数、z ハ複素変数、又 $\varphi(t)$ ハ與ヘラレタ既知ノ函數デ區間 $0\leqq t<+\infty$ ニ於テ連續、且ツ

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(t)\,dt=\lambda\ (>0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

トスル、従ツテ

$$t\to\infty \text{ ノトキ } \int_0^t\varphi(t)\,dt\to\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A')$$

然ラバ

$$f(t)=e^{-\int_0^t\varphi(t)\,dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ハ方程式 (1) ヲ満足スル。

ソレヲ証明スルタメニ、(2) ノ $f(t)$ ヲ使テ *Laplace* 積分

$$J(z)=\int_0^\infty e^{-tz}f(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ヲ考ヘル、之ハz平面ニ於ケル直線 $x=-\lambda$ ノ右半平面デ確カニ收斂スル。(*) 但シ $z=x+iy$. 從ッテソノ區域ニ於テ $J(z)$ ハ確定シタ値ヲ有ツ、$J(z)$ ニ部分積分法ヲ適用スルト

$$\int_0^\infty e^{-tz} f(t)\,dt = \left[-\frac{e^{-tz}}{z} f(t)\right]_0^\infty + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-tz} f'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-tz}\big(-\varphi(t)\big)\cdot f(t)\,dt$$

故ニ

$$\int_0^\infty e^{-tz}\big(z+\varphi(t)\big)\cdot f(t)\,dt = 1$$

〔附記〕 念ノタメニ (*) ヲ證明シテミル。

$z=x+iy$ ガ $x>-\lambda$ トスレバ $x>\xi>-\lambda$ ナル ξ ヲトル。

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt = -\lambda$$

ダカラ ξ ニ對シテ t_0 ヲ充分大キクトレバ

$$t>t_0 \text{ ノトキ } \quad \frac{\log f(t)}{t} < \xi$$

從ッテ $f(t) < e^{\xi t}$

一方 $|e^{-z}| = e^{-x} < e^{-\xi}$ ダカラ $e^{-x} = \theta\cdot e^{-\xi}$ トオケバ

$$0<\theta<1$$

然ラバ

$$R_{t_0}=\left|\int_{t_0}^{\infty}e^{-zt}f(t)\,dt\right|\leqq\int_{t_0}^{\infty}e^{-xt}f(t)\,dt<\int_{t_0}^{\infty}(\theta e^{-\xi})^{t}\cdot e^{\xi t}\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}\theta^{t}\,dt=\frac{\theta^{t_0}}{\log\theta}$$

故ニ $t_0\to\infty$ ノトキ $R_{t_0}\to 0$. 即チ $J(z)$ ハ収斂スル。