181. $y\dfrac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$ニ就テ, III

福原　満洲雄（北大）

(a) $$y\frac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$$

ニ於テ $A(x)$, $B(x)$ ハ $x\to\infty$ ノ時

$$(1)\quad \begin{cases} A(x)\sim a_{-m}x^{m}+a_{-m+1}x^{m-1}+\cdots\cdots \\ B(x)\sim b_{-n}x^{n}+b_{-n+1}x^{n-1}+\cdots\cdots \end{cases}$$

ナル形ニ展開サレ, $2m+1>n$ デアルトスル。

6. 前回ハ

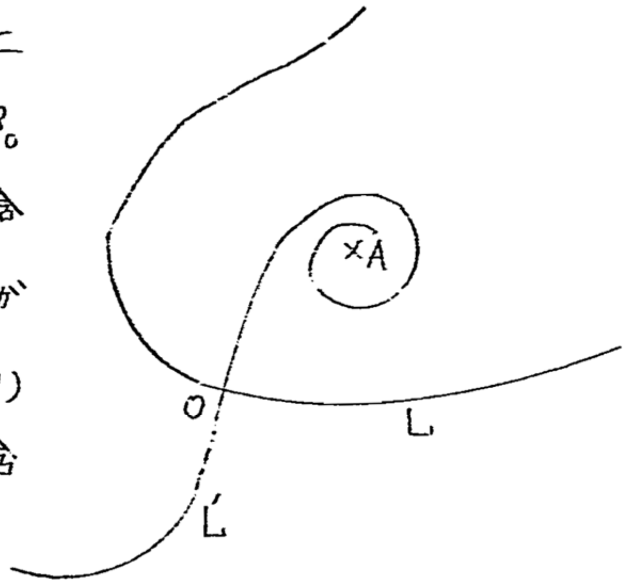
$$|y-\alpha_0 x^{m+1}|<\delta|x|^{m+1}$$

又ハ $|y-\beta_0 x^{n-m}|<\varepsilon|x|^{n-m}$

デアルヤウナ部分ダケヲ考ヘタノデアルカラ此ノ制限ヲ取除カナケレバナラナイ。再ビ (1) ハ一般ニ近似展開デアルトシ，x ガ正ノ値ヲ取リナガラ $+\infty$ ニ近ヅク場合ヲ考ヘル．此ノ時 $2m+1<n$ 場合ノ II, III, IV（第46号）ニ相當スル結果ハ次ノヤウニ述ベラレル。

IX. $R(a_{-m}^2/b_{-n})>0$ ノ場合

(i) $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点ヲ持ツ（即チ $y=0$ トナル）(a) ノ解ガ $x=x_0$ デ取ル値ヲ y_0 トシタトキ y_0/x_0^{n-m} ナル点ノ集合ハ原点ヲ通リ，両端ガ ∞ マデ伸ビテヰル一ツノ曲線 L トナル（図参照）．L ノ切線ガ実軸トナス角ハ切点ガ ∞ ニ近ヅクニ従ッテ $\arg(a_{-m})$ ニ近ヅク。



(ii) L ニ依ッテ平面ガ二ツノ領域ニ分レル、其ノ中 β_0 ヲ含ム方（図ニ於テ点Aヲ含ム方）ニ $y(x_0)/x_0^{n-m}$ ガ属スルヤウナ (a) ノ解ハ (β) ナル形ニ展開サレ、β_0 ヲ含マナイ方ニ $y(x_0)/x_0^{n-m}$ ガ属スルヤウナ (a) ノ解ハ (α) ナル形ニ展開サレル。

(iii) $y(x_0)/x_0^{n-m}$ ガ L ノ上ニアルヤウナ (a) ノ解ハ $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点 ξ ヲ持ツカラ ξ カラ先ハ y ノ取ル値ガ二ツアル．其ノ中一方ハ (α) ナル形ニ，他ハ (β) ナ

ル形ニ展開サレル。

X. $R(a_{-m}^2/b_{-n})<0$ ノ場合.

(i) $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点ヲ持ツ (a) ノ解ガ x_0 デ取ル値ヲ y_0 トシタトキ y_0/x_0^{n-m} ナル点ノ集合ハ原点O ヲ過ル一ツノ曲線 L' デ、其ノ一端ハ ∞ マデ伸ビテ居リ、他ハ渦状トナツテ一点Aニ収斂スル、コノ場合ニモ L' ノ切線ガ実軸トナス角ハ切点ガ ∞ ニ近ヅクニ従ツテ $\arg(a_{-m})$ ニ近ヅク、点Aハ $x_0 \to \infty$ ノ時 β_0 ニ収斂スル。

(ii) $y(x_0)/x_0^{n-m}$ ガ点Aト一致スルヤウナ (a) ノ解ハ (β) ナル形ニ展開サレ、他ノ解ハ皆(α) ナル形ニ展開サレル。

(iii) $y(x_0)/x_0^{n-m}$ ガ L' ノ上ニアルヤウナ解ハ $x_0 \leqq x < +\infty$ デ分岐点 ξ ヲ持ツカラ、ξ カラ先ハ y ノ取ル値ハ二ツアルガ、ソノ何レモ (α) ナル形ニ展開サレル。

7. 最後ニ「(1) ガ収斂ナ級数デソノ和ガ $A(x)$, $B(x)$ デアル場合ニ $x=\infty$ ノ近傍 (∞ ヲ除ク) ニ分岐点ヲ持タナイ (a) ノ解ガ存在スレバ, $x=\infty$ ハ其ノ解ノ正則点カ又ハ極デアル」コトノ証明ノ順序ヲ述ベテ置カウ。

$\cos((2m-n+1)\theta-\omega) \neq 0$ デアルヤウナ方向デ ∞ ニ近ヅクトキニハ IX, X ニ依ツテ (a) ノ解ハ必ズ (α) 又ハ (β) ナル形ニ展開サレル、故ニ

$$\arg x = \frac{\omega + k\pi}{2m-n+1}, \quad |x| > R_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

デ

$$|y-\alpha_0 x^{m+1}|<\delta|x|^{m+1}$$

又ハ $|y-\beta_0 x^{n-m}|<\varepsilon|x|^{n-m}$

ガ成立スル．若シ R_k ガ k ニ無関係ニ取レルナラバ I, VI ニ依ツテ此ノ二ツノ不等式ノ何レカガ $|x|>R$ デ常ニ成立スルコトガ分ル。サウナルト VII, VIII ニ依ツテ其ノ解ハ (α) 又ハ (β) ナル形ノ（近似的デナク）収斂ナ級数ニ展開サレル．若シ R_k ガ k ニ無関係ニ取レナイナラバ

$$\arg x=\frac{\omega+k\pi}{2m-n+1},\quad |x|\geqq R$$

デ

$$|y(x)-\alpha_0 x^{m+1}|<\delta|x|^{m+1},$$
$$|y(x)-\beta_0 x^{n-m}|>\varepsilon|x|^{n-m}$$

ガ成立スルヤウナ x ノ値 ξ ガ存在スル．$y(\xi)=\eta$ トシ，x ヲ y ノ函数ト考ヘ、y 平面デ適當ナ曲線ニ依テ η ヲ原点 O ニ結ンダトキ其ノ上デハ常ニ $|x|$ ガ（最初ニ與ヘラレタ）或正ノ値 R_0 ヨリ小サクナラナイヤウニナルコトガ証明サレル。從ツテ其ノヤウナ解ハ $|x|\geqq R_0$ デ分岐点ヲ持ツコトニナル。コレデ証明ハ完結スルノデアルガ、此ノ曲線ノ取リ方ガ $2m+1<n$ ノ場合ノヤウニ簡單デハナイカラ詳シイ説明ハ省略スル。