184. Pseudo-regular function ノ應用 II

角谷静夫（阪大）

Speiser ノ問題＝pseudo-regular function ニヨル transformation ヲ應用シテアル種ノ Riemann 面ガ hyperbolic デアルタメノ十分條件ヲ求メマシタ。

ココニ考ヘル Riemann 面ハソノ分岐点ガスベテ logarithmic デ且ツソレラノ点ガ w 面上ノ三点 1, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{\frac{4\pi}{3}i}$, 上ニアダモノノウチデ特ニソノ topological tree ガ symmetric ナモノデアリマス。即チ

$$\mu(\theta)=3.2^k, \quad \pi n_k \leqq \theta < \pi n_{k+1}$$

ナル $\mu(\theta)$ ヲモツ Riemann 面 F ヲ考ヘマス。コヽニ

$$0=n_0<n_1<n_2<\cdots\cdots<n_k<\cdots\cdots$$

ハ整数デアリマス。故ニ F ノ topological tree ハ modular function ノ逆函数ノ Riemann 面ノ topological tree ノ原点カラ k 番目ニアル線分ヲ $\pi(n_k-n_{k-1})$ ノ長サニヒキノバシタモノデアル。

定理. $\sum \frac{n_{k+1}-n_k}{n_k-n_{k-1}} \cdot \frac{1}{2^k}$ ガ収斂スレバ F ハ hyperbolic デアル。

注意　$n_k=3.2^k$トオケバ、コレニ對應スル Riemann 面 F_1 ハ hyperbolic デ

$$\mu_1(\theta)=n_k,\quad \pi n_k\leqq\theta<\pi n_{k+1}$$

トナル。トコロガ $w=e^{e^z}$ ノ逆函數ノ Riemann 面 F_2 ニ對シテハ

$$\mu_2(\theta)=2\left[\frac{\theta}{\pi}\right]+3$$

トナルカラ

$$\mu_2(\theta)\geqq\mu_1(\theta)$$

デアル。シカルニ F_2 ハ明カニ parabolic デアル。コレヨリ $\mu(\theta)$ ノ増加ノ程度ニヨッテ F ノ type ヲ決定スルコトハ不可能ナルコトガワカル。

證明：　小林氏ノ方法ニ依ッテ Riemann 面 F ヲ變形シテ极ヒ易イ形ニスル。（但シ小林氏ノトキハ變換ハ部分的ニ analytic デアッタガ今ハ必ズシモサウデナクテモ全體トシテ q ガ有界ナル如キ pseudo-regular ナ函數ニヨル變換デアレバヨイ）

先ヅ F ヲ F ノ對數的分岐點ヲ通ル半直線

$$\operatorname{Arg} w=\frac{2}{3}p\pi\quad(p=0,\ 1\ \text{or}\ 2)$$

ニヨッテ切リ、F ヲ可附番無限個ノ次ノ何レカト合同ナ領域ニ分ケル。

$$D_1:\quad -\frac{\pi}{3}<\operatorname{Arg} w<\frac{\pi}{3},\qquad 0<|w|<\infty;$$

$$D_2:\quad -\frac{2\pi}{3} < \operatorname{Arg} w < \frac{2\pi}{3} \qquad 0<|w|<\infty$$

D_1, D_2 ヲソノ原点ニ於ケル角ノ二等分線 $\operatorname{Arg} w = 0$ ニヨツテ切リ、ソレラヲ夫々

$$|W| = |w|,\quad \operatorname{Arg} W = \pm\frac{3}{2}\arg w\,;$$

$$|W| = |w|,\quad \operatorname{Arg} W = \pm\frac{3}{4}\arg w$$

ニヨツテ領域

$$D:\quad 0<\operatorname{Arg} W<\frac{\pi}{2},\quad 0<|W|<\infty$$

ニ変換スル。（$W=i$ ガ F ノ對数的分岐点ニ對應スルモノトスル）

D ハ

$$\zeta = \log\left(\frac{i-W}{i+W}\right)$$

ニヨツテ $\zeta=\xi+i\eta$ 平面ノ領域

$$S:\quad -\infty<\xi<0,\qquad 0<\eta<\pi$$

ニウツセル。但

$$\operatorname{Arg} W = 0 \qquad\qquad \text{ガ } \xi=0,\quad 0<\eta<\pi$$

$$\operatorname{Arg} W=\frac{\pi}{2},\quad 0<|W|<1 \text{ ガ } \eta=0,\ -\infty<\xi<0$$

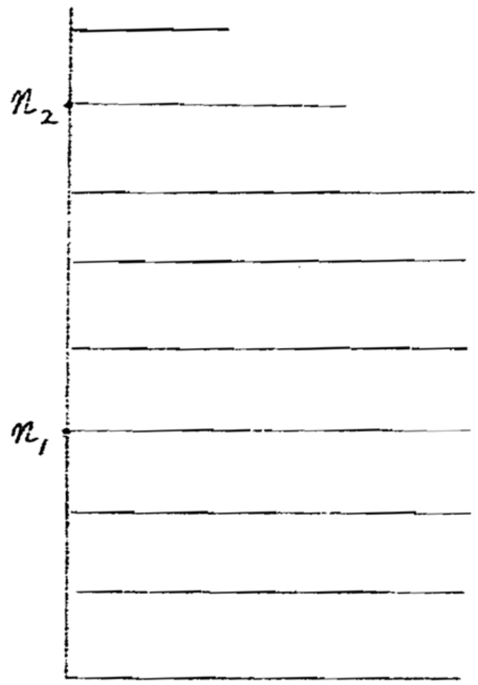
$$\operatorname{Arg} W=\frac{\pi}{2},\quad 1<|W|<\infty \text{ ガ } \eta=\pi,\ -\infty<\xi<0$$

ニ對應スル。

コノ S ヲ可附番無限個取ツテ、コレラヲ F ニ於ケル D_1,

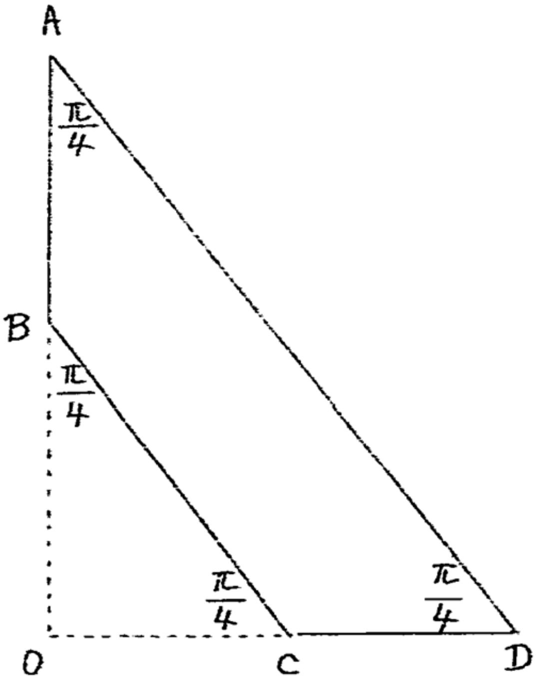
D_2ト topologically ニ同等ナル如クツナギ合ハシテ、小林氏ノ作ラレタ Cylindrical surface ト同様ナ面 Σ ヲ作ル。

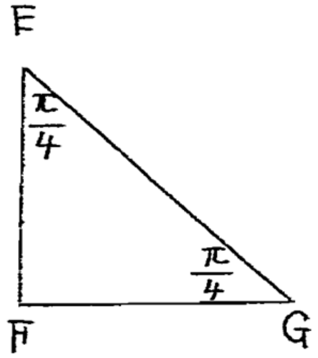
Σ ハ F ノ topological tree ノ各部分ニ S ヲ二枚ヅツ（両側ヘ一枚ヅツ）$\xi=0,\ 0<\eta<\pi$ ナル部分ニ沿ッテ貼リツケテ、相隣ル S（topological tree ノ両側ヲ區別シテ考ヘル）ヲ $\eta=0,\ -\infty<\xi<0$（又ハ $\eta=\pi,\ -\infty<\xi<0$）ナルトコロニ沿ッテ連結シタモノデアル。Σ ヲ適當ニ疊ンデ右図ノ如クスル。コレヲ再ビ $\zeta=\xi+i\eta$ 平面上ニ考ヘレバ Σ ハ $\xi>0,\ \eta>0$ ナルトコロニアリ、$\pi n_k \leqq \eta < \pi n_{k+1}$ ナルトコロニハ $2\cdot 3\cdot 2^k = 2\mu(\eta)$ 枚ノ面（裏ト表デ2倍トナル）ガ重ッテヰル。



Σ ヲ $\eta+\xi=\pi n_k$ ナル線 L_k ニヨッテ切断シ、Σ ノ L_k ト L_{k+1} トノ間ニアル部分 T_k $(k\geqq 1)$ ヲ $s=\sigma+i\tau$ 平面ノ $0<\tau<2\pi$ ナル部分ヘ次ノ如ク ξ,η ノ一次変換ニヨッテ寫像スル。（一次函数モ pseudo-regular f. ト考ヘルコトガ出来ル）

T_k ハ次ノ如キ $T'_k,\ T''_k$ 各々 $3\cdot 2^k$ 枚（ソノウチ半分ハ裏返ヘシニナッテヰル）ヨリ成立シテヰル。





$EF = FG$
$= \pi(n_{k+1} - n_k)$

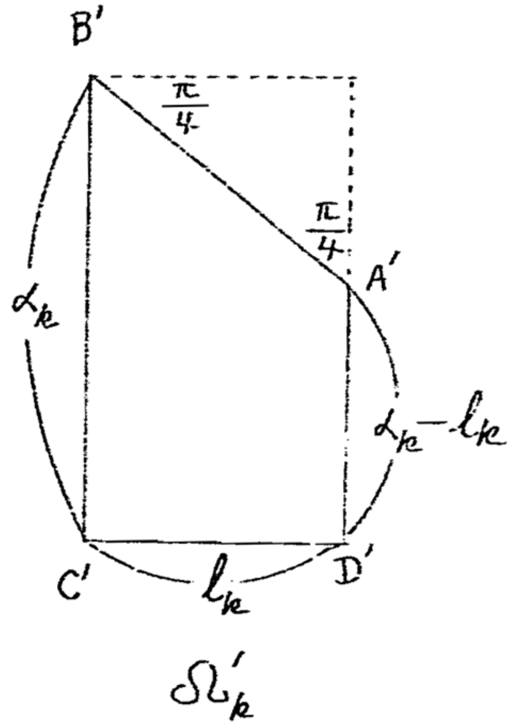
$AB = CD = \pi(n_{k+1} - n_k)$

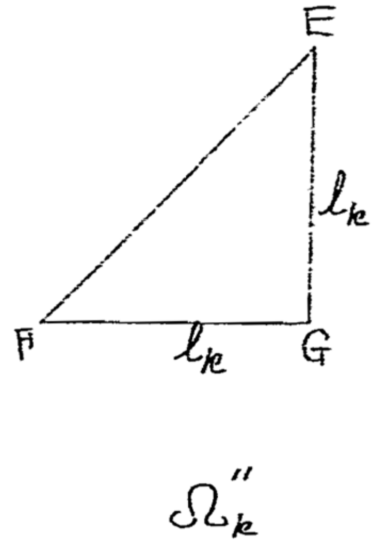
$OB = OC = \pi(n_k - n_j), \quad j < k$

T_k' T_k''

T_k' ト T_k'' ハ AB, EF ノ線ニ沿ツテツナガリ、T_k' ト他ノ T_k' トハ CD ニ沿ツテ又、T_k'' ト他ノ T_k'' ハ FG ニ沿ツテツナガル。

T_k', T_k'' ヲ夫々次ノ如キ S平面上ノ領域 Ω_k', Ω_k''（又ハソノ裏ガヘシノ領域）ニ A, B, C, D; E, F, G ガ夫々 A', B', C', D'; E', F', G'（又ハソノ裏ガヘシ）ニ對應スル如キ一次変換ニヨツテ寫像スル。（コノ際各辺上ニテハ変換ハ相似変換ニナルモノトス）





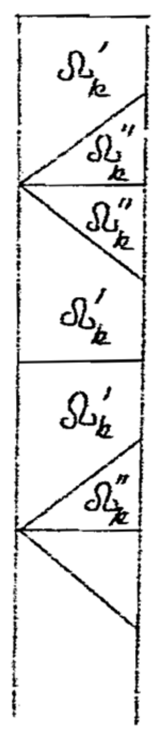
但シ $\alpha_k = \frac{\pi}{3\cdot 2^k}$ ニシテ l_k ($l_k < \alpha_k$) ハ後ニ適當ニ定メルモノトスル。

コノトキ、T_k', T_k'' ノウチデ裏がヘシニナツテヰルモノニハ、Jacobian < 0 ナル変換ヲホドコスコトニスル。

カクシテ得ラレタ Ω_k', Ω_k'' 又ハソノ裏がヘシニナツタ領域ヲ、ハジメノ T_k ニ於テ T_k', T_k'' がツナがツテヰタト同様ニツナギアハセレバ結局 T_k ハ

$$\Omega_k:\quad 0 < \sigma < l_k,\quad 0 < \tau < 2\pi$$

$$(S = \sigma + i\tau)$$



ヘ寫像サレル。(右図参照)

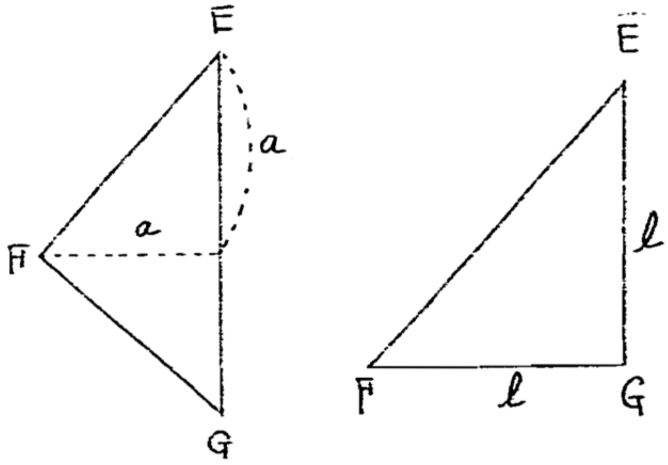
コノトキ $q + \frac{1}{q}$ ヲ計算スル。

先ヅ T_k'': $(0 < |y| < x < a)$ ヲ

Ω_k'': $(0 < Y < X < l)$ ニ E, F, G が夫々 E', F', G' ニ對應スル如ク

$$X=\frac{l}{a}x,$$

$$Y=\frac{l(x+y)}{2a}$$

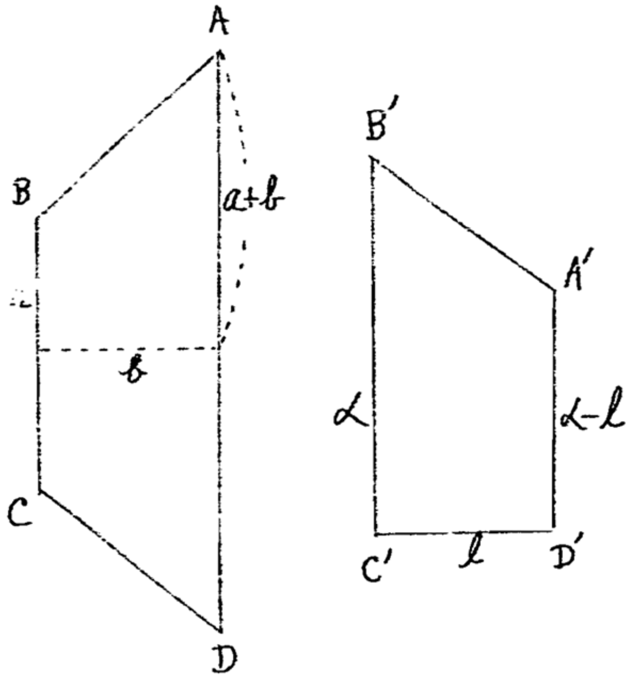


ニヨツテ寫像スル。

コノトキ

$$q+\frac{1}{q}=3$$

デアル。



次ニ $\mathfrak{T}'_k:(0<x<b,$

$|y|<x+a)$

ヲ $\mathfrak{S}'_k:(0<X<l,$

$|Y|<\alpha-X)$

ニ

$$X=\frac{l}{b}x$$

$$Y=\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2(a+x)}\right)\left(\alpha-\frac{l}{b}x\right)$$

ニヨツテ寫像スル。コノトキ

$$q+\frac{1}{q}=\frac{\frac{l^2}{b^2}+\left\{\frac{y}{2(a+x)^2}\left(\alpha-\frac{l}{b}x\right)+\frac{l}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2(a+x)}\right)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2(a+x)}\left(\alpha-\frac{l}{b}x\right)\right\}^2}{\frac{l}{b}\ \frac{1}{2(a+x)}\left(\alpha-\frac{l}{b}x\right)}$$

$$\leqq\frac{4l(a+b)}{b(\alpha-l)}+\frac{\alpha b}{la}+2$$

次ニlヲ定メルタメbノ大キサニヨッテ二ツノ場合ニ分ツ。

(i) $b \leqq \dfrac{a}{2}$ ナラバ $l = \dfrac{\alpha b}{a}$ トオケバ $\left(l < \dfrac{\alpha}{2}\right)$

$$q + \frac{1}{q} \leqq \frac{4(a+b)}{(a-b)} + 3 = 15$$

(ii) $b > \dfrac{a}{2}$ ナラバ $l = \dfrac{\alpha}{2}$ トオケバ

$$q + \frac{1}{q} \leqq 14 + 2\frac{b}{a}$$

故ニlヲ斯ノ如ク定メルコトニスレバ常ニ

$$q < q + \frac{1}{q} \leqq 15 + 2\frac{b}{a}$$

トナル。シカモ

$$\sum l_k \leqq \sum \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{2}\sum \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} < \infty$$

デアルカラ結局Σハ $0<\tau<2\pi$, $-\infty<\sigma<\sigma_0$ ヘ $q<15+2\dfrac{b}{a}$ ナル函数ニヨッテ寫像サレル。
(Σ ノ L_1 ニヨリ囲マレタ部分ハ $-\infty<\sigma<l_1$, $0<\tau<2\pi$ ニ適當ニqガ有界ナル函数ニヨリウツスコトガ出來ル)

次ニS平面カラΣヘノ逆ノ変換ヲ考ヘレバ136号定理6ノ証明ト同様ニシテ

$$\lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} \int^{\sigma} q(\sigma)\, d\sigma < \infty$$

ナラバ Σ シタガッテFガ hyperbolic トナルコトガワ

カル。即チ

$$\sum\left(15+2\frac{b_k}{a_k}\right)l_k \quad \text{又ハ} \quad \sum\frac{b_k}{a_k}l_k$$

ガ収斂スレバヨイ。シカルニ

$$a_k=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n_k-n_j)\geqq\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n_k-n_{k-1})$$

$$b_k=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(n_{k+1}-n_k)$$

$$l_k\leqq\frac{\alpha_k}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

デアルカラ結局

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k-n_{k-1}}\ \frac{1}{2^k}$$

ガ収斂スレバ十分デアル。（証明終）