185. 可分集合ノ一性質

稲垣　武（北大）

集合EアルトキEノ部分集合カラナル單調整列族$\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$が*Stationnaire*デアルトキEハ如何ナル性質ヲ有サネバナラナイカヲ考ヘ、ソレカラ得ラレル一、二ノ結果ヲ揭ゲテ見マス。

性質1：集合Eノ部分集合カラナル減少整列族$\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ニ於テ凡テノ$\alpha$ニツキ$F_\alpha$ガ$F_{\alpha+1}$ノ外苞ニ含マレザルトキ$\mathfrak{F}$ハ可附番デアル。

カヽル性質ヲ有スル集合Eハヨク知ラレテヰル如ク超ぶ、こむぱくとデアル。性質1ニ對應シテ次ノ性質ガ考ヘラレル。

性質2：集合Eノ部分集合カラナル增加整列族$\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ニ於テ凡テノ$\alpha$ニツキ$F_{\alpha+1}$ガ$F_\alpha$ノ外苞ニ含マレザルトキ$\mathfrak{F}$ハ可附番デアル。

カヽル集合Eニ就テハ：W. *Sierpinski: sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits.* Fund. Math. Tome II. 1921. P. 179—188.

ニ於テ，S—空間ニツイテ論ジテアル、コノ證明ト殆ンド同様ニシテV—空間デ論ズルコトが出來ル。即チ

定理1：性質2ヲ有スル集合Eノ任意ノ部分集合ハ可分デアル。及コノ逆ガ成立スル。

証明: Eノ或ル非可附番部分集合Mハ可分ナラズトスル。

Mノ要素ヲ次ノ如ク並ベル。

$$p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_\alpha, \cdots\cdots\cdots, \quad \alpha < \eta. \quad \eta \geqq \Omega.$$

今 $q_1 = p_1$ トオク。 $1 \leqq \xi < \alpha$ ナル ξ デ q_ξ ガ定義サレタトシテ q_α ヲ次ノ如ク定義スル。

$$Q_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} q_\xi \quad (\alpha < \Omega) \text{ トオク.}$$

Q_α ハ可附番デ且ツMガ可分ナラザル假定ヨリ

$$M - (Q_\alpha + Q'_\alpha) \neq 0$$

今 $M - (Q_\alpha + Q'_\alpha)$ ニ含マレル要素ノ最初ノモノヲ q_α ト定メル、扨テ

$$F_\alpha = Q_\alpha \quad (\alpha < \Omega)$$

ト定義スレバ、明カニ

$$F_\alpha \subset F_{\alpha+1}, \quad F_{\alpha+1} - (F_\alpha + F'_\alpha) \ni q_\alpha$$

コレハ性質2ナル假定ニ反ス。

次ニEノ任意ノ部分集合ハ可分デアルトキ、性質2ヲ満足セザルモノガアツタト假定スル、コレデ $\mathfrak{F} = \{F_\alpha\}$ トスル。

$$F_{\alpha+1} - (F_\alpha + F'_\alpha) \ni q_\alpha$$

トオケバ

$$F_\alpha \supseteq F_{\xi+1} \qquad \xi < \alpha$$

$$F_\alpha \ni q_\xi$$

$$(F_\alpha + F'_\alpha) \cdot q_\alpha = 0$$

$$g_1, g_2, \text{------} g_\alpha \text{------} \quad (\alpha < \Omega)$$

トシ $M=\{g_\alpha\}$ ヲ考ヘル．Mが可分ナラザルコトヲ示サウ。

若シMが可分ナリトスレバ、M内ニ可附番部分集合

$$N=\{g_{\mu_n}\} \text{ アリテ、} \quad N+N' \geqq M \quad \text{トナル。}$$

扨 $\mu_1, \mu_2, \text{---------}, \mu_n, \text{--------} \quad < \mu \ (<\Omega)$

ナル高々第二級ノ順序数 μ が存在スル。

$$F_{\mu+1} \ni g_\mu$$

$$g_\mu \cdot (F_\mu + F'_\mu) = 0$$

又 $F_\mu \ni g_{\mu_n} \qquad \therefore F_\mu \geqq \{g_{\mu_n}\}$

$$\therefore F'_\mu \geqq \{g_{\mu_n}\}' \quad .$$

$$\therefore g_\mu \cdot F'_\mu \geqq g_\mu \cdot \{g_{\mu_n}\}' = 0$$

コレハ $N+N' \geqq M$ ナル假定ニ反ス。 Q.E.D.

性質1又ハ性質2が成立スレバ、"互ニ相素ナル開集合族ハ高々可附番デアル"コトハヨク知ラレテヰルが又次ノ定理が成立スル。

定理2：性質1，又ハ性質2が成立スレバ

<u>性質3</u>：任意ノ部分集合ニ於テ，ソコデ互ニ相素デ且ツ内点ヲ有スル集合族ハ高々可附番デアル。

コノ証明ハ此処デハ略シテオク、カゝル性質ヲ有スル集合ハ如何ナルモノナルカヲ調ベヤウ。

定義：　集合Eノ任意ノ非可附番部分集合が自己ニ属スル集積点ヲ有スルトキ、Eヲ超〆こむぱくトト云フ。

定理3： ∇－空間ニ於テ次ノ四ツノ性質ハ同値デアル。

(1) 集合EノE任意ノ部分集合ニ於テ、ソコデ互ニ素デ内点ヲ有スル集合族ハ高々可附番デアル。

(2) 集合Eハ超αこむぱくとデアル。

(3) 集合Eノ部分集合カラナル減少整列族 $\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ ニ於テ凡テノ α ニツキ $F_\alpha-F_{\alpha+1}$ ガEニ於テ縁集合ナラザレバ $\mathfrak{F}$ ハ可附番デアル。

(4) 集合Eノ部分集合カラナル増加整列族 $\mathfrak{F}=\{F_\alpha\}$ ニ於テ凡テノ α ニツキ $F_{\alpha+1}-F_\alpha$ ガEニ於テ縁集合ナラザレバ $\mathfrak{F}$ ハ可附番デアル。

証明： (1)$\longrightarrow$(2)： Eハ超αこむぱくとナラズト假定スル。

従ッテEノ非可附番部分集合Mアリテ集積点ヲ有セナイ。

故ニMノ任意ノ点 p ニ或ル近傍 $\nabla(p)$ アリテ $\nabla(p)\cdot M=p$ トナル、然シテ $\nabla(p)\cdot M$ ハMニ於テ内点ヲ有スル集合デアル、従ッテカヽル近傍族 $\{\nabla(p)\cdot M\}$ ヲ考フレバ、コレハMデ互ニ素デ且ツ内点ヲ有シ、非可附番デアル、コレハ(1)ナル假定ニ反スル。

(2)$\longrightarrow$(3)： 減少整列族 $F_1\supset F_2\supset\cdots\cdots\supset F_\alpha\supset\cdots\cdots$

ガ非可附番ナリトスル。 $F_\alpha-F_{\alpha+1}$ ハEデ縁集合ナラザル故 $F_\alpha-F_{\alpha+1}\ni p_\alpha$ ナル点アリテ或ル近傍 $\nabla_\alpha(p_\alpha)$ ニ對シテハ $F_\alpha\supseteqq\nabla_\alpha(p_\alpha)$, $F_{\alpha+1}\cdot\nabla_\alpha(p_\alpha)=0$

カヽル点 p ノ集合 $\{p_\alpha\}$ ヲ考フレバコレハ非可附番デ且

集積点ヲ有シナイ、故ニ(2)ナル假定ニ反ス。

(3)⟶(4)：　増加整列族 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots\cdots \subset F_\alpha \subset \cdots\cdots$ デ

$F_{\alpha+1} - F_\alpha$ ハEデ緣集合ナラザル故

$$CF_1 \supset CF_2 \supset \cdots\cdots \supset CF_\alpha \supset \cdots\cdots$$

且ツ $CF_\alpha - CF_{\alpha+1}$ ハEデ緣集合デナイ。

故ニ(3)ニヨリ $\{CF_\alpha\}$ ハ高々可附番、從ツテ $\{F_\alpha\}$ ハ高々可附番デアル。

(4)⟶(1)：　$E \supseteq M$ トシ M デ互ニ素デ且ツ内点ヲ有スル集合族デ非可附番ナルモノガアリトシ、コレヲ $\{M_\alpha\}$ トスル。

今 $F_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} M_\alpha$ トオケバ

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots\cdots \subset F_\alpha \subset \cdots\cdots$$

且ツ $F_{\alpha+1} - F_\alpha = M_{\alpha+1}$

トナリ、Mデ緣集合デナイ。然ルニ $\{F_\alpha\}$ ハ非可附番、コレハ(4)ナル假定ニ反ス。　Q.E.D.

次ニ近傍系ニ *Hausdorff* ノ第二公理ヲ導入スル。

公理(B)：　$U(x)$ 及ビ $V(x)$ ヲ同一ノ点 x ノ二ツノ近傍トスル、然ルトキハ x ノ近傍 $W(x)$ ニシテ $U(x)\cdot V(x)$ ニ屬スルモノガアル。

定理4：　性質3ヲ有スル集合ガ可分ナラザレバ凝集点ヲ有ス。

証明：　集合EノM部分集合Mガ可分ナラズトシテ，Mガ凝集点ヲ有スルコトヲ示セバヨイ。

Mハ凝集点ヲ有セズト假定スル、Mノ任意ノ一点 p_1 ＝對シテハ適當ナル近傍 $V_1(p_1)$ アリテ $M \cdot V_1(p_1)$ ハ高々可附番デアル、一般＝ $1 \leqq \beta < \alpha$ ナル凡テノ β ＝對シテ p_β・$V_\beta(p_\beta)$ が定義サレタルトキ p_α、$V_\alpha(p_\alpha)$ ヲ次ノ如ク定メル。

$$M - \overline{\left(\sum_{\beta<\alpha} V_\beta(p_\beta)\right)} \qquad (\alpha < \Omega)$$

ヲ考ヘルト、Mハ可分ナラザル假定＝ヨリ空集合デナイ。故＝ソノ一点ヲ p_α トスル、p_α ハ $\sum_{\beta<\alpha} V_\beta(p_\beta)$ ノ外点ナル故適當ナル近傍 $W(p_\alpha)$ アリテ

$$W(p_\alpha) \cdot \left(\sum_{\beta<\alpha} V_\beta(p_\beta)\right) = 0$$

又 p_α ハ M ノ凝集点ナラザル故＝近傍 $U(p_\alpha)$ アリテ $U(p_\alpha) \cdot M$ ハ高々可附番、從ッテ $W(p_\alpha) \cdot U(p_\alpha) \supseteq V_\alpha(p_\alpha)$ ナル近傍ヲ求メルコトが出來ル。カクシテ互＝素デ内点ヲ有スル集合族 $\{V_\alpha(p_\alpha)\}$ ヲ得ル、コノ集合族が可附番ナラバ M ハ可分トナリ假定＝反ス、又非可附番ナラバ<u>性質3</u>＝反ス、即チ M ハ凝集点ヲ有サネバナラナイ。

Q.E.D.

系1. 性質3ヲ有スル集合Eが高々可附番個ヨリ凝集点ヲ有セザルトキ、Eハ可分集合デアル。

系2. 性質3ヲ有スル集合Eハ可分集合ト凝集点ノ集合ト＝分解出來ル、即チ

$$E = C + (E - C)$$

コヽニCハEノ凝集点ノ集合.

E−C ハ可分集合デアル。