191. 點集合論ニ於ケル類ト測度トノ概念ニ就イテ（I）

近藤基吉（北大）

類ノ概念ト測度ノ概念トノ類似性ヲ第一類集合ノ有ス.

ル性質ト測度0ノ集合ノ有スル性質トノ類似性ヲ基準トシテ考察シテ見タイト思フ、類ノ概念ニハ空間ニ関スルモノト集合ニ関スル相對概念トガアリ、コレニ對應シテ測度ノ方デハ *Lebesgue* ノ理論ノ基礎トナル概念ト *caratheodory* ノ理論ノ根幹ヲナス概念トガ考ヘラレル、從ッテコヽニ於イテモ空間ニ関スル場合ト集合ニ関スル場合トヲ分ケテ考ヘル必要ガアル、コヽデハ先ヅ空間ニ関スル概念ノ類似性カラ考察スルコトニシヨウ。

ソコデ類ノ場合ニハ第一類集合ニ相當シ測度ノ場合ニハ測度0ノ集合ニ相當スル *ensemble mince* ト云フ概念ト *ensemble mesurable* (B) トイフ概念ノ導入サレタル空間 R ヲ考ヘルコトニスル。

R ニ於イテハ *ensemble mince* ガ次ノ二ツノ條件

I　R ノ部分集合 E ガ *mince* ナルトキニハ E ノ凡テノ部分集合ハ又 *mince* デアル. 特ニ空集合ハ *mince* デアル。

II　R ノ *mince* ナル部分集合ノ高々可附番個ノ和ハ又 *mince* デアル。

ヲ満足スルモノトシテ置ク、尚 R ノ *mince* ナル部分集合ノ全体カラナル族ヲ $\mathfrak{M}(R)$ 或ハ簡單ニ $\mathfrak{M}$ ニテ示シ R ノ *ensemble mesurable* (B) ノ全体カラナル族ヲ $\mathfrak{L}(R)$ 或ハ簡單ニ $\mathfrak{L}$ ニテ示スコトニスル。

$\boxed{\textit{Équivalence des ensembles}}$ *ensemble mince*

ノ概念ニ依ッテ *équivalence* ノ概念ヲ導入スル．ソノタメニ R ノ部分集合ノ族 $\mathfrak{F}$ ヲ考ヘル．ソコデ R ノ二ツノ部分集合 E ト F トニ對シテ

$$(\mathrm{M} \in \mathfrak{F}) \longrightarrow \{(\mathrm{ME} \in \mathfrak{M}) \backsim (\mathrm{MF} \in \mathfrak{M})\}$$

ガ成立スルトキニ E ト F トハ $\mathfrak{F}$ ニ關シテ *équivalent* デアルト云フ。（コヽニ $\longrightarrow$, $\backsim$ ハ夫々命題ノ *inclusion* 及ビ *équivalence* ヲ示ス論理記号デアル、尚 *et* ト云フ意味ヲ示ス論理記号トシテ & ヲ用フルコトガアル）ソシテコノ事實ヲ

$$\mathrm{E} \sim \mathrm{F}\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F}) \text{ 或ハ } \mathrm{F} \sim \mathrm{E}\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F})$$

ニテ示ス、定義ニヨッテ直チニ 1° $\mathrm{E} \sim \mathrm{E}\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F})$. $2^\circ (\mathrm{E} \sim \mathrm{F} (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F})) \longrightarrow (\mathrm{F} \sim \mathrm{E} (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F}))$ $3^\circ \{(\mathrm{E} \sim \mathrm{F} (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F})\ \&\ (\mathrm{F} \sim \mathrm{G} (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F}))\} \longrightarrow (\mathrm{E} \sim \mathrm{G} (\mathrm{rel}\ \mathfrak{F}))$ ノ成立スルコトガワカル。特ニ R ノ凡テノ部分集合ノ族 γ ニ對シテ $\mathrm{E} \sim \mathrm{F}\ (\mathrm{rel}\ \gamma)$ ナルトキニ E ト F トハ *équivalent* デアルト云ヒ $\mathrm{E} \sim \mathrm{F}$ 或ハ $\mathrm{F} \sim \mathrm{E}$ ニテ示ス、然ル時ニハ容易ニ次ノ結果ガ導カレル。

1° R ノ部分集合 E ガ *mince* ナルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\mathrm{E} \sim 0$ ノ成立スルコトデアル。

2° R ノ二ツノ部分集合 E ト F トガ *équivalent* ナルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $(\mathrm{E}+\mathrm{F})-\mathrm{EF} \sim 0$ ノ成立スルコトデアル。

Étendue extérieure et interieure, Propriété de Lebesgue

コノ *équivalence* ノ概念ニ依ッテ類ノ場合ニハ廣イ意味

デ、Baire ノ性質[1]ニ相當シ測度ノ場合ニハ可測度性ニ相當スル Lebesgue ノ性質ヲ定義スル、ソレニハ先ヅ測度ノ場合ニ於ケル集合ノ等測包及ビ等測核ニ相當スル étendue exterieure 及ビ interiure ノ概念ヲ定義シテ置クノガ便利デアル。類ノ場合ニコレ等ノ概念ニ相當スル概念ハ餘リ用ヒラレナイヤウデアルガ、コレニ依ツテ証明ガ簡單ニナサレル場合ガ多イヤウデアル。ソコデ étendue exterieure 及ビ intérieure ノ定義ヲ與ヘテ置カウ、R ノ部分集合 E ニ對シテ

$$E \sim H \ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$$

ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ガ存在スル時ニ H ヲ E ノ étendue exterieure ト云フ（コヽニ $\mathfrak{L}C$ ハ ensemble mesurable (B) ノ補集合ノ全体カラナル族ヲ示ス）E ニ étendue extérieure ガ存在シ H_i ($i=1,2$) ガ E ノ étendue exterieure ナルトキニハ $E \sim H_i \ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$ ($i=1,2$) デアルカラ

$$(H_i \in \mathfrak{L}) \to \{(E-H_i \sim 0) \frown (H_i - H_i \sim 0)\}$$

ニ依ツテ $E-H_i \sim 0$ デアル．然ルニ $E \sim H_j \ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}C)$ ($i \neq j$) デアルカラ

$$(H_i \in \mathfrak{L}) \to \{(E-H_i \sim 0) \frown (H_j - H_i \sim 0)\}$$

ニ依ツテ $H_j - H_i \sim 0$ デアル，ソレ故ニ $H_i \sim H_j$ デアル、即チ E ノ étendue extérieure ハ互ニ équivalent デアル、ソコデ E ノ étendue exterieure ノ一ツヲ $\gamma^*(E)$ ニ

テ表ハスコトニシヨウ。然ルトキニEノ任意ノ étendue extérieure ハ$\nu^*(E)$ト équivalent デアル。
次ニRノ部分集合Eニ對シテ

$$R-E\sim R-H\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L})$$

ノ成立スル ensemble mesurable (B) Hガ存在スルトキニHヲEノ étendue intériure ト云フ。Eノ étendue interieure ガ存在シテ H_i ($i=1.2$) ガソノ étendue interieure ナル時ニハ étendue extérieure ノ場合ト同様ニ $H_1\sim H_2$ ガ得ラレル。ソコデ étendue exterieure ノ場合ト同様ニEノ étendue intérieure ノ一ツヲ $\nu_*(E)$ ニテ示ス。
ソコデRノ部分集合Eニ対シテ $\nu^*(E)$, $\nu_*(E)$ ガ存在シ且ツ $\nu^*(E)\sim\nu_*(E)$ ガ成立スルトキニEハ Lebesgue ノ性質ヲ有スト云フ、EガLebesgue ノ性質ヲ有ス時ニハ

$$(E+\nu^*(E))-E\nu^*(E)\subset\{E-\nu^*(E)\}+\{\nu^*(E)-\nu_*(E)\}+\{\nu_*(E)-E\}$$

ト $\nu^*(E)\sim\nu_*(E)$ トニ依ツテ $(E+\nu^*(E))-E\nu^*(E)\sim 0$ デアル
ソレ故ニ $E\sim\nu^*(E)$ デアル、即チEガ Lebesgue ノ性質ヲ有ス時ニハEハ ensemble mesurable (B) ノ一ツト équivalent デアル、逆ニEガ ensemble mesurable (B) H ト équivalent ナルトキニハ $E\sim H\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{r})$ デ且ツ $\mathfrak{r}\supset\mathfrak{L}c$ デアルカラ $E\sim H\ (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$ ニ依ツテ $\nu^*(E)\sim H$ デアリ同様ニシテ $\nu_*(E)\sim H$ デアルカラコレヨリEガ Lebesgue ノ性質ヲ有スコトガ分ル、即チ

Théorème 1. Rノ部分集合Eが *Lebesgue* ノ性質ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハEト *équivalent* ナル *ensemble mesurable* (B) ノ存在スルコトデアル。

Opérations de ensembles et la propriété de Lebesgue

Rノ部分集合; *étendue extérieure* 並ニ *intérieure* ニ關スル加法並ニ乘法ノ定理及ビ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スル集合ノ加法並ビニ乘法ニ關スル定理ヲ證明シテ置ク。

Théorème 2. 1° Rノ部分集合 $E_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ガ *étendue extérieure* ヲ有スナレバ

$$(1)\qquad \nu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\nu^*(E_n)\qquad (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L}c)$$

ニシテ更ニ $\sum_{n=1}^{\infty}\nu^*(E_n)$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス時ニハ

$$(2)\qquad \nu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\nu^*(E_n)$$

デアル、ソシテ E_n ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有シ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ガ *étendue intérieure* ヲ有ストキニハ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ハ又 *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス。

2° Rノ部分集合 $E_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ $\prod_{n=1}^{\infty}E_n$ ガ *étendue intérieure* ヲ有スナレバ

$$C\nu_*\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_n\right)\sim C\prod_{n=1}^{\infty}\nu_*(E_n)\qquad (\mathrm{rel}\ \mathfrak{L})$$

ニシテ更ニ $\prod_{n=1}^{\infty}\nu_*(E_n)$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有ストキニハ

$$\nu_*\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_n\right)\sim\prod_{n=1}^{\infty}\nu_*(E_n)$$

デアル、ソシテ $E_n\ (n=1,2\cdots\cdots)$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有シ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ ガ *étendue extérieure* ヲ有スルトキニハ $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ ハ又 *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス。

証明. 2°ハ1°ト同様ニ証明セラレルカラ1°ノミヲ証明スル。

先ヅ (1) ノ証明カラ始メル、R ノ *ensemble mesurable* (B) H ニ對シテ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0$ ナレバ $E_n - H \sim 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $E_n \sim \nu^*(E_n)\ (rel\ \mathfrak{L}c)$ ニ依ッテ $\nu^*(E_n) - H \sim 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - H \sim 0$ デアル、即チ

$$(3)\quad \left\{(H \in \mathfrak{L}) \,\&\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0\right)\right\} \to \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - H \sim 0\right\}$$

デアル。次ニ *ensemble mesurable* (B) H ニ對シテ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - H \sim 0$ ナレバ $\nu^*(E_n) - H \sim 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアルカラ $\nu^*(E_n) \sim E_n\ (rel\ \mathfrak{L}c)$ ニ依ッテ $E_n - H \sim 0\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0$ デアル、即チ

$$(4)\quad \left\{(H \in \mathfrak{L}) \,\&\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - H \sim 0\right)\right\} \to \left\{\sum_{n=1}^{\infty} E_n - H \sim 0\right\}$$

デアル、ソレ故ニ (3), (4) ニ依ッテ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n)\ (rel\ \mathfrak{L}c)$ ガ得ラレル. 然ルニ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim \nu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)\ (rel\ \mathfrak{L}c)$ デアルカラコノ二式ヨリ (1) ガ得ラレル。

次ニ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n)$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スルトキニハ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) \sim H$ ノ成立スル *ensemble mesurable* (B) H ガ存在スル、コノ H ニ対シテ $H \sim \nu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right)\ (rel\ \mathfrak{L}c)$ デアルカラ、又

$H\sim\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)$ デアル、ソレ故ニ H ノ定義カラ (2) ガ得ラレル。

最後ニ $E_n(n=1,2,\text{------})$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スルトキニ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ガ *étendue intérieure* ヲ有スナレバ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ハ又 *Lebesgue* ノ性質ヲ有スコトヲ証明スル。E_n ハ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スカラ $E_n\sim H_n(n=1,2,\text{-----})$ ノ成立スル *ensemble mesurable* (B) H_n ガ存在スル. H_n ニ對シテ $H_n-E_n\sim 0$ デアルカラ $H_n-\sum_{K=1}^{\infty}E_n\sim 0$ デアル、然ルニ $\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)$ ノ定義カラ $C\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sim CV_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)$ (*rel* $\mathcal{L}$) デアルカラ $H_n-V_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)\sim 0$ ガ成立スル. 從ツテ $E_n-V_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)\sim 0$ デアル、コレヨリ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n-V_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)\sim 0$ ガ得ラレル、他方ニテ *étendue intérieure* ノ性質カラ $V_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sim 0$ デアル、ソレ故ニ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ハ $V_*(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)$ ト *équivalent* デアル、即チ $\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ ハ *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス。　　　Q. E. D.

コノ *Théorème* ニ依ツテ分ルコトハ R ノ凡テノ *sous-ensemble* ガソノ *étendue extérieure* 及ビ *intérieure* ヲ有スナレバ R ニ含マレ且ツ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スル集合ノ高々可附番個ノ和及ビ積ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スコトデアル、然シコノ場合ニハ更ニ精密ナ結果ヲ導クコトガ出來ル。

Théorème 3. R ノ凡テノ部分集合ガ *étendue extérieure* 及ビ *intérieure* ヲ有スナレバ R ノ *Lebesgue* ノ性質ヲ

有スル集合カラナル sonslin 族 $\{E_{n_1 n_2 \cdots n_K}\}$ $(K, n_K = 1, 2, \cdots)$ ノ核

$$E = \sum \prod_{K=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \cdots n_K}$$

ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

証明. R ノ Lebesgue ノ性質ヲ有スル部分集合ノ高々可附番個ノ和及ビ積ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有スカラ

$$E_{n_1 n_2 \cdots n_K} \supset E_{n_1 n_2 \cdots n_K n_{K+1}}$$

ト假定スルモ一般性ヲ失ハズ、コヽデ

$$Z_{m_1 m_2 \cdots m_l} = \sum \prod_{K=1}^{\infty} E_{m_1 m_2 \cdots m_l n_1 \cdots n_K}$$

ト置ケバ明カニ

(1) $\quad Z_{m_1 m_2 \cdots m_l} \subset E_{m_1 \cdots m_l}$

(2) $\quad Z_{m_1 \cdots m_l} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{m_1 \cdots m_l n}$

$$Z \equiv \sum \prod_{K=1}^{\infty} Z_{n_1 \cdots n_K} = E$$

デアル、扨テ $E_{m_1 \cdots m_l}$ ハ Lebesgue ノ性質ヲ有シ(1)が成立スル故ニ

$$\nu^*(Z_{m_1 \cdots m_l}) - E_{m_1 \cdots m_l} \sim 0$$

デアル、ソレ故ニ

$$\nu^*(Z_{m_1 \cdots m_l}) (E_{m_1 \cdots m_l} + T_{m_1 \cdots m_l}$$

ノ成立スル ensemble mince $T_{m_1 \cdots m_l}$ が存在スル、今コヽデ

$$T = \sum T_{m_1 \cdots m_l}$$

トスレバ $\mathrm{T}m_1\text{-----}m_l$ ハ mince ニシテ且ツ

$$\nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l)(E_{m_1 \cdots\cdots m_l} + \mathrm{T})$$

デアル、ソレ故ニ

$$\mathrm{K} \equiv \sum \prod_{l=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l)(E + \mathrm{T})$$

デアル、從ッテ $\mathrm{K} - E \sim 0$ デアル、次ニ(2)ニ依ッテ

$$\nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l n)$$

或ハ $\quad \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l n) \sim 0$

デアル、同様ニ $E = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ カラ $\nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z_n) \sim 0$ デアル。

然ルニ

$$\nu^*(E) - \mathrm{K} < \nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) + \sum \Big\{ \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z m_1 \cdots\cdots m_l n) \Big\}$$

デアルカラ $\nu^*(E) - \mathrm{K} \sim 0$ デアル、ソレ故ニコレト $\mathrm{K} - E \sim 0$ トカラ $\nu^*(E) - E \sim 0$ デアル、他方ニテ $E - \nu^*(E) \sim 0$ デアルカラ $E \sim \nu^*(E)$ デアル．即チ E ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

Q. E. D.

$\boxed{\text{Espace de classe } (S^*)}$ I．II ヲ滿足スル ensemble mince 及ビ ensemble mesurable (B) ノ定義セラレタル空間 R ノ中デ

III R ノ凡テノ部分集合ハ étendue extérieure 及ビ intérieure ヲ有ス。

Ⅳ　R ノ ensemble mesurable (B) ノ補集合ハ又 Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

ヲ満足スルモノヲ (S^*) 型ノ空間ト名付ケル。

Théorème 4.　Ⅰ, Ⅱ ヲ満足スルヤウナ ensemble mince 及ビ ensemble mesurable (B) ノ定義サレタル空間 R ガ (S^*) 型メルガタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

(A)　R ノ任意ノ部分集合 E ニ對シテ $E \sim H$ (rel $\mathcal{L}$) ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ガ存在スル。

(B)　R 及ビ R ノ ensemble mesurable (B) ノ有限個ノ和ハ Lebesgue ノ性質ヲ有ス。

ノ成立スルコトデアル。

証明　十分條件ナルコト、R ノ部分集合 E ニ對シテ $E \sim H$ (rel $\mathcal{L}$) ノ成立スル ensemble mesurable (B) H ノ一ツヲ $\mu(E)$ ニテ示ス。然ルトキニ $E \sim H$ (rel $\mathcal{L}$) ノ成立スル任意ノ ensemble mesurable (B) H ニ對シテ $\mu(E) \sim H$ デアル、即チ $H\mu(R-H) \sim 0$ デアルカラ $H \sim \mu(E)$ (rel $\mathcal{L}$) ニ依ッテ $\mu(E)\,\mu(R-H) \sim 0$ デアル、ソレ故ニ $\mu(E) - H \sim 0$ デアル。

同様ニシテ $H - \mu(E) \sim 0$ ガ得ラレ $\mu(E) \sim H$ ガ証明セラレル。ソコデ先ヅ R ノ部分集合 E ニ對シテ $\mu(E)$ ガ E ノ étendue extérieure ナルコト、即チ $E \sim \mu(E)$ (rel $\mathcal{L}c$) ナルコトヲ証明スル。

i) $\{(M \in \mathcal{L}) \,\&\, (E - M \sim 0)\}$ ナルトキ、M ハ *ensemble mesurable* (B) デアルカラ $M\mu(R-M) \sim 0$ デアル．然ルニ $E - M \sim 0$ デアルカラ $E\mu(R-M) \sim 0$ ニ依ッテ $\mu(E)\,\mu(R-M) \sim 0$ デアル、コレヨリ $\mu(E)\,(R-M) \sim 0$ ガ得ラレル、即チ

$$\{(M \in \mathcal{L}) \,\&\, (E - M \sim 0)\} \longrightarrow \{\mu(E) - M \sim 0\}$$

デアル。

ii) $\{(M \in \mathcal{L}) \,\&\, (\mu(E) - M \sim 0)\}$ ナルトキ先ヅ $M + \mu(R-M) \sim R$ ナルコトヲ証明スル。$M + \mu(R-M)$ ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有シ $R \sim \mu(R)$ デアルカラ $M + \mu(R-M) \sim R$ (*rel* $\mathcal{L}$) ナルコトヲ示セバ十分デアル。$\{(N \in \mathcal{L}) \,\&\, (N(M + \mu(R-M)) \sim 0)\}$ ノ時ニハ $NM \sim 0$ デ且ツ $N\mu(R-M) \sim 0$ デアルカラ $N(R-M) \sim 0$ ヨリ $NR \sim 0$ デアル。又 $\{(N \in \mathcal{L}) \,\&\, (NR \sim 0)\}$ ノトキニハ明カニ $N(M + \mu(R-M)) \sim 0$ デアル。ソレ故ニ $M + \mu(R-M) \sim R$ ガ成立スル、扨テ $\mu(E)\,(R-M) \sim 0$ デアルカラ $\mu(E)\,\mu(R-M) \sim 0$ ニ依ッテ $E\mu(R-M) \sim 0$ デアル、然ルニ $M + \mu(R-M) \sim R$ デアルカラ $EM \sim M$ 或ハ $E - M \sim 0$ デアル、即チ

$$\{(M \in \mathcal{L}) \,\&\, (\mu(E) - M \sim 0)\} \longrightarrow \{E - M \sim 0\}$$

デアル、ソレ故ニ i) ii) ヨリ $E \sim \mu(E)$ (*rel* $\mathcal{L}c$) ガ得ラレル．

次ニ R ノ部分集合 E ガ *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス時ニ $R - E$ モ亦 *Lebesgue* ノ性質ヲ有スコトヲ示ス、E ハ *ensemble mesurable* (B) ノ一ツト *équivalent* デアルカラ E ガ *mesurable* (B) ナルトキヲ考ヘレバ十分デアル．然ル時ニハ $E + \mu(R-E) \sim R$ デ $E\mu(R-E) \sim 0$ デアルカラ $\mu(R-E) \sim R-E$

ニ依ッテ R−E ハ *Lebesgue* ノ性質ヲ有ス。最後ニ R ノ部分集合 E ハ *étendue intérieure* ヲ有スコトヲ示ス。

$R-\mu(R-E)$ ハ *Lebesgue* ノ性質ヲ有スカラ $R-\mu(R-E)\sim H$ ノ成立スル *ensemble mesurable* (B) H ガ存在スル。今 H ガ E ノ *étendue intérieure* ナルコトヲ証明シヨウ、

$\{(M\in\mathcal{L})\,\&\,(M-E\sim 0)\}$ ノトキニハ $M\mu(R-E)\sim 0$ デアルカラ $H\sim R-\mu(R-E)$ ニ依ッテ $MH\sim M$ 或ハ $M-H\sim 0$ デアル。

$\{(M\in\mathcal{L})\,\&\,(M-H\sim 0)\}$ ノ時ニハ $H\sim R-\mu(R-E)$ ニ依ッテ $M\sim MH\sim M-M\mu(R-E)$ デアル、ソレ故ニ $M\mu(R-E)\sim 0$ デアル、コレヨリ $M-E\sim 0$ ガ得ラレルカラ $R-E\sim R-H\,(rel\ \mathcal{L})$ デアル、従ッテ H ハ E ノ *étendue intérieure* デアル。

必要條件ナルコト自明デアル。　　　　Q. E. D.

(附註)

(1) 直線 L ノ部分集合 E ガ L ニ於テ広イ意味デ *Baire* ノ性質ヲ有スト云フノハ E ニ對シテ $(E+H)-EH$ ガ L ニ於テ第一類集合デアルヤウナ *ensemble mesurable* (B) H ガ存在スルコトデアル。