

# 196. 積分方程式論ヲ函數空間論ノ應用トシテ ミルトキ

佐藤 帝三 (京大)

マツ Unit operator  $E$  = 對應スル核ノナイコトハ  
明ラカ。 Hilbert ノ積分方程式ノ理論カテ出悉シタ抽象  
空間ノ理論ガ、逆ニ前者ヲ後者ノ特種トミルトキ唯々其ノ儘  
ガ済マサレナイ氣ノスル個所ガアルヤウニ思ヒマス、冒頭ニ  
述ベマシタ様ニ  $E(x, y)$  ナルヤウニ核ガ御座イマセンカラ  
polynomial operator ヲ定義スル際ハ:

$$P_m(z) = e_1 z + e_2 z^2 + \dots + e_n z^m$$

ニ對シテ

$$P_m(K) = e_1 K + e_2 K^{(2)} + \dots + e_m K^{(m)}$$

$(K^{(i)}(x, y) \text{ ハ } K \text{ ノ } i\text{-th iterated kernel})$

ヲ採用シマス、勿論  $K(x, y)$  ハ對稱核ニシテ complete  
トシマス。(特ニ正核トシテ置キマス)、サウシマスト先ツ  
次ノコトガ云ヘマス。

polynomial  $P_m(x)$  が  $0 \leq x \leq \frac{1}{\lambda_1}$  で常  $= \geq 0$  ナラバ  
 $P_m(K)^{(\frac{x}{\lambda})}$  は positive definite kernel.

茲 = 固有値ヲ  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$  ;  
 固有函数ヲ  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  トオキマ  
 ス。

斯レシテ polynomial kernel ヲ 延法シテユクコト  
 が出來ル手順ハ、例ヘバ岩波講座、藤原博士著無限多変数函  
 数論 II = 述べラレテアリマス、繰返シテ申シマスガ  $E(x, y)$   
 ナル如キ核ノ存在ノ許サレヌノハ自明デスガ、常數項ヲ持ツ  
 整式

$$P_m(x) = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots + e_m x^m$$

= 對應シテ

$$P_m^*(K)^{(\frac{x}{\lambda})} = e_0 + e_1 K + e_2 K^{(2)} + \dots + e_m K^{(m)}$$

が定義出來ナイカ? 私ハコレ = ツイテノ理由ヲ求メヌノデ  
 スガ、若シ私ノ操作 = 自家撞着ガアリマスナラバ、御叱正ヲ  
 賜リタシ。

兎ニ角  $x P_m(x) = x(e_0 + e_1 x + \dots + e_m x^m)$   
 = 對應スル kernel ハ存在シマスカラ、 $K P_m^*(K) =$   
 ツイテハ

$$(1) \varphi_i(x) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_i} P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)} \int_a^b K P_m^*(K)^{(\frac{x}{\lambda})} \cdot \varphi_i(t) dt,$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

コレカラ  $P_m^*(\mathbb{K})^{(\frac{b}{a})}$  なる函数, characteristic properties を求めよ。

ソノタ  $\chi =$

$$\psi_i(u) = \int_a^b P_m^*(\mathbb{K})^{(\frac{u}{t})} \varphi_i(t) dt$$

トオケバ, (1)ヨリ

$$\mu_i \varphi_i(x) = \int_a^b \mathbb{K}(x; u) \psi_i(u) du,$$

$$\mu_i \equiv \frac{1}{\lambda_i} P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

シカ  $\nu =$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d_{\nu i}}{\lambda_{\nu}} \varphi_{\nu}(x),$$

$$d_{\nu i} = \int_a^b \psi_i(t) \varphi_{\nu}(t) dt, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$\{\varphi_{\nu}\}$  なる system の "normé" であるから

$$d_{\nu i} = \begin{cases} \lambda_i \mu_i & \nu = i \\ 0 & \text{for } \nu \neq i \end{cases}$$

即ち  $d_{ii} = P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right), \quad d_{\nu i} = \int_a^b \psi_i(t) \varphi_{\nu}(t) dt = 0$

由て今  $\psi_i$  のノルム =

$$\overline{\psi_i} = \left( \psi_i / P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \right)$$

ヲトメテバ,  $i$  ノーツ = ツイテ

$(\bar{\psi}_i, \varphi_i) = 1, (\bar{\psi}_i, \varphi_2) = 0$  for all  $i$ .  
complete system + 正ノトカヲ

$$\bar{\psi}_i \equiv \varphi_i$$

従ッテ

$$\psi_i = P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \varphi_i$$

元ニ戻セバ

$$(2) \quad P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \varphi_i(x) = \int_a^b P_m^*(K) \left(\frac{x}{t}\right) \varphi_i(t) dt,$$

( $i = 1, 2, 3, \dots$ )

今次ノ如キ symmetrical function ヲ考ヘル,

$$\chi(x, t) \equiv P_m^*(K) \left(\frac{x}{t}\right) - \sum_{p=1}^m e_p K^{(p)}(x, t).$$

(2) ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned} \int_a^b \chi(x, t) \varphi_i(t) dt &= \int_a^b P_m^*(K) \left(\frac{x}{t}\right) \varphi_i(t) dt \\ &\quad - \sum_{p=1}^m e_p \int_a^b K^{(p)}(x, t) \varphi_i(t) dt \\ &= \left\{ P_m\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) - \sum_{p=1}^m e_p \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^p \right\} \varphi_i(x) \\ &= e_0 \varphi_i(x) \end{aligned}$$

即チ 
$$\varphi_i(x) = \frac{1}{e_0} \int_a^b \chi(x, t) \varphi_i(t) dt$$

for all  $i = 1, 2, 3, \dots, ad \infty$ .

コレが成立スルタメニハ characteristic constant

$\frac{1}{e_0}$  ハ finite value ハトリ得ナシ。

故ニ  $C_0 = 0$