201. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, I

福原満洲雄（北大）

1. 今迄数回ニ亘ッテ

$$(a)\quad y\frac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$$

ヲ論ジタガ、總テノ場合ヲ盡シタワケデナク、報告スベキ結果モ残ッテヰルガ纏メルノガ面倒デソノマヽニナッテヰル、又佐藤徳意氏ハ

$$y\frac{dy}{dx}=A(x)y^2+B(x)y+C(x)$$

ノ場合ヲ論ジ、次第ニ(a)ノ場合ト同様ナ結果ヲ得ツツアル、此等モ近イ中ニ報告スル積リデアル、此ノ特殊ナ場合ノ研究カラ一般ノ場合ヘ進ムニハドウイフ方針ヲ取ルカ、其ノ一例ヲコヽニ述ベヨウ。尚今後「$y\dfrac{dy}{dx}=A(x)y+B(x)$ ニ就テ」ノ第n回ノモノヲ引用スル時ニハ〔A_n〕デ示ス。

2. 〔A_1〕ノ場合ニハ(a)ヲ形式的ニ満足スル級数

$$(\alpha)\quad y\sim x^{\rho}\left\{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_j}{x^j}+\cdots\cdots\right\}$$

ヲ作ルト、$\alpha_0, \alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ ハ常数トシテキマルガ、α_{n+i} ハサウ行カナイ、ソコデ

$$(1)\quad y=x^{\rho}\left\{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n}{x^n}+\frac{z}{x^{n+1}}\right\},\quad x=\frac{1}{t}$$

ト置イテ (t, z) ニ関スル方程式ヲ

$$(b)\quad -t(\alpha_0+\cdots\cdots+\alpha_n t^n+z t^{n+1})\frac{dz}{dt}$$
$$=C(t)+D(t)z+E(t)z^2$$

ト書ケバ, $C(t)$, $D(t)$, $E(t)$ ハ

$$\begin{cases} C(t)\sim c_0+c_1 t+\cdots\cdots \\ D(t)\sim d_1 t+\cdots\cdots \\ E(t)\sim \frac{n+1}{2}t^{n+1}+\cdots\cdots \end{cases}$$

ナル形ニ展開サレル、コレガ

$$(\beta)\quad z\sim\beta_0+\beta_1 t+\cdots\cdots+\beta_j t^j+\cdots\cdots$$
$$(\beta_j \text{ ハ } p\log t+C \text{ ノ整多項式})$$

ナル形ニ展開サレル解ヲ持ツコトカラ (a) ガ (α) ナル形ニ展開サレル解ヲ持ツコトガ結論サレル、但

$$\rho=\frac{n+1}{2},\quad \alpha_0=\pm\sqrt{\frac{2b-n}{n+1}},$$

$\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ ハ常数

$\alpha_{n+1}, \cdots\cdots\cdots\cdots$ ハ $p\log x-C$ ノ整多項式

デアル（[A_1] デ使ッタ記号ヲソノママ説明ナシニ使ッタ).

方程式 (b) ヲ

$$(\mathrm{B})\quad t\frac{dz}{dt}=g(t, z)$$

ナル形ニ書イテ $g(t, z)$ ヲ z ノ冪デ展開シタモノヲ

$$(g)\quad g(t, z)=g_0(t)+g_1(t)z+\cdots\cdots+g_m(t)z^m+\cdots\cdots$$

ト書ケバ $g_m(t)$ ハ $t\to+0$ ノ時

$(g_m)\quad g_m(t) \sim g_m^{(0)} + g_m^{(1)} t + \cdots\cdots + g_m^{(j)} t^j + \cdots\cdots$

ナル形ニ展開サレ、而モ $\lambda = n+1$ ト置ケバ

(2) $\quad a_m^{(0)} = -p,\ a_1^{(0)} = 0,\ a_m^{(j)} = 0 \quad (j < (m-1)\lambda)$

トナツテヰルコト，及ビ(g)ガ $0<t<\delta,\ |z|t^\lambda < \zeta$ ナル範囲デ收斂デ、其ノ上各項ニ x^λ ヲ掛ケレバ其ノ收斂性ガ一樣トナルコトガ分ル、故ニ一般ニ

I. (g)ハ $0<t<\delta,\ |z|\,t^\lambda < \zeta$ ナル範囲デ收斂デ、各項ニ x^λ ヲ掛ケレバ其ノ收斂性ガ一樣ニナルトスル、又 $g_m(t)$ ハ (g_m) ナル形ニ近似的ニ展開サレ且ツ (2) ヲ假定スル、其ノ時任意ノ C ノ値ニ對シテ (β) ナル形ニ展開サレル (B) ノ解ハ存在シ、而モ唯一ツニ限ル、

コトガ想像サレ、実際ニ存在定理，單独條件ヲ驅使スルコトニヨツテ証明サレル。

(3) 併シソレダケデ満足スルワケニハ行カナイ、(β) ナル形ニ展開サレナイ解ハドウナルカ、$[A_1]$ ノ場合ニツイテ言ヘバ (α) ナル形ニ展開サレナイ解ハ

$$\varliminf_{x\to+\infty} |x^{-p} y - \alpha_0| \geqq 2|\alpha_0|$$

ヲ満足スル、コレヲ (t, z) ニ関スル関係ニ直スト

$$\varliminf_{t\to+0} t^{-\lambda} |z| \geqq 2|\alpha_0|$$

トナル、実際ニ私ガ証明シタ時ニハ後者カラ前者ヲ導イタノデアル、故ニ一般ノ假定ニ戻ツテモ

II. 適當ナ正ノ數εヲ取レバ(β)ナル形ニ展開サレナイ解ハ（$0<t<\delta$デ存在スル時）

$$\varliminf_{t\to+0} t^{-\lambda}|z| \geqq \varepsilon$$

ヲ滿足スル。

ト言ヘナイデアラウカ、ソコデ(B)ノ解ヲ

$$\frac{A}{x^{\lambda}+Mx_0^{\lambda}} - B\frac{x^{\mu}}{x_0^{\lambda}} \qquad (0<\mu<1)$$

ナル函數ト比較シテ見ルト肯定的ナ答ヘヲ得ル。以上ノ結果ヲ複素領域ニ擴張スルコトモ容易デアル、コレダケデ我々ノ目的ニハ十分ノヤウニ思ハレル。

(4) 與ヘラレタ假定ノ下ニ(β)ナル形ノ近似展開ヲ許ス解ノ存在及ビ單獨性ヲ證明スルコトハ、此ノ種ノ論法ニナレタ者ニトツテハ難事デナイ。併シIダケデナクIIマデ予想スルコトが出來ルノハ已ニ簡單ナ一例ヲ解イテヰルカラデアル、ケレドモIIモ亦ソレ程予想ニ困難デアルトハ思ハレナイ、已ニ解カレタ實例がモット重要ナ役割ヲ演ジテヰルノハ$g(x,z)$ニ對シテドウイフ假定ヲ設ケルカトイフ点ニ於イテデアル。Iデ述ベタ假定ハ，$2m+1<n$ノ場合ノ(a)$[A_1]$ニ関スル結果ヲ知ツテ居レバコソ、自然ニ設ケラレタノデアルが、ソレナシニ何処カラサウイフ條件ヲ持チ出シテ來ラレルダラウカ．若シ(B)が(β)ナル形ノ近似展開ヲ許ス解ヲ持ツトイフコトダケヲ目標トスルナラバ、モット緩イ假定デ十分デア

ル、併シソレデハ我々ガ必要トスル工ハ得ラレナイ、ソシテ此ノ工ガ必要デアルコトハ實例ニヨツテ知リ得タ所ナノデアル。

然ラバ上ニ述ベタ場合ニ帰着サレル方程式ハドンナ形ヲ持ツカ、コレニ関シテハ一般ニ *reduction* ノ問題ノ時ニ触レルコトニシヨウ。

(5) コノヤウニシテ簡單ナ實例カラ出發シテ一般ノ理論建設ヘノ方針ガ指示サレル．今迄佐藤氏ト私ガ取扱ツタ例ハ甚ダ簡單デハアルガ、ソノ結果カラ推シテ予想定理ガ正シイコトハ殆ンド確実ノヤウデアル．時ニ思ヒガケナイ事實ニ出遭フコトモナイデハナイガ、大体ニ於テ予想通リニ事ガ運ンデ行ク。*Malmquist* ノ定理ノ擴張バカリデナク、一階ノ常微分方程式ヲ近似的ニ解ク（コノ言葉ノ意味ハ多少説明ヲ要スルガ、ココデハ省略シテ置ク）トイフ問題ガ完全ニ解決サレルノハ近イ中 ―――― ト言ツテモ余程順調ニ行ツタトシテ、即チ手間ノ問題ダケニナツタトシテモ半年ヤ一年ハカカル ―――― ダト思ツテ居ルノハ夢ダラウカ。

ドンナ問題ヲ解クニシテモ、其ノ際道具ガ入用デアル、ソレガナカツタラ、ソレヲ作ツテカラ解決ニ乗出スノガ順序デアル、ソノ道具ヲ作ル準備期間ハ長クテ氣ガ焦ル、仕事ハ骨ガ折レル割ニ目立タナイ、微分方程式論ニ於イテ解ノ存在定理ハ基礎デアリ、研究ノ道具デアリ又同時ニ道具ヲ作リ出ス源泉デモアル。併シ古典的ナ形ニ於ケル解ノ存在定理デハ

力不足デアル、ソレニ磨キヲカケル必要ガアツタ、今ヤ此ノ道具ハ一階常微分方程式ノ近似的研究ニハ十分ナ程度ニ鍛ヘラレタト思ツテ、此ノ道具ノ効力ヲ試ミルタメ其ノ解決ヲ企テタ次第ナノデアル。永イ地下ノ仕事ノ後、日ノ目ヲ見タヤウナ思ヒガスル。併シ二階又ハソレヨリ高イ微分方程式、或ハ偏微分方程式ヘ進ムニハ未ダ道具ガ不足デアル、再ビ此ノ苦シイ準備工作ニ移ラネバナルマイト思ッテヰル。