205. 概週期函數ノ Fourier 級數ノ Operation ニ關スル Bochner-Jessen ノ定理

高橋進一（阪大）

J. Favard ハ其ノ thèse, Sur les fonctions harmoniques presque-périodiques (Paris, 1927) 中デ次ノ有名ナ定理ヲ述ベテ居マス。

今

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \quad (-\infty < t < \infty)$$

ヲ real variable t ノ概週期函數トスル。$f(t)$ ノ積分ガ有界デ且ツ $f(t)$ ハ order α $(0<\alpha\leqq 1)$ ノ Lipschitz condition ヲ滿足スルナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} i A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n e^{i\Lambda_n t},$$

$$\operatorname{sgn} \Lambda_n = \begin{cases} +1 & \text{for } \Lambda_n > 0 \\ 0 & \text{for } \Lambda_n = 0 \\ -1 & \text{for } \Lambda_n < 0 \end{cases}$$

ハ $f(t)$ ノ Conjugate function $g(t)$ ノ Fourier 級數デアル。

此ノ定理ノモトノ証明ハ調和概週期函数ノ理論ヲ使フノデ可成リ面倒デスガ Favard ハ昨年 "Matematisk Tidsskrift, B" デ

Sur la fonction conjuguée d'une fonction presque-périodique

ノ標題下ニ上掲ノ定理ノ簡單ナ証明ヲ公ニシマシタ。

其ノ証明法ハ概週期函数ノ親玉 Bohr ヲシテ私ニクレタ手紙中デ "*the beautiful method*" ト云ハシメタ程極メテ *elegant* ナモノデス。私ハ此ノ Favard ノ方法ヲ使ッテ次ノ定理ヲ証明シマシタ。

(S. Takahashi, On a Property of the Fourier Series of an Almost Periodic Function, 帝國學士院記事, 1935)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x} \quad (-\infty < x < \infty)$$

ヲ *real variable* x ノ概週期函数トシ且ツ $f(x)$ ノ積分ガ有界ナラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sgn} \Lambda_n \cdot e^{-\sigma|\Lambda_n|} e^{i\Lambda_n x} \quad (\sigma \text{ ハ任意ノ正数})$$

モ亦概週期函数ノ Fourier 級数トナル。

此ノ定理ハ *analytic almost periodic function* ノ理論中デ重要ナ定理ノ一ツデアル Bohr ノ "*Randwertsatz*" ノ一拡張ト見做シ得ルモノデス。所ガ先程出タ "*Matematisk Tidsskrift B*" デ Copenhagen 大學数学教室ノ R. Petersen ガ

Om den for melle Differentiation of

Fourierudviklingen for en naesten-periodisk Funktion

ノ標題下ニ私ノ定理ヲ擴張シタ次ノ樣ナ美シイ定理ヲ証明シテ居マス。（原論文ハでんまーく語）

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ real variable t ノ概週期函数トスルトキ

$$\sum_{\Lambda_n<0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n s}$$

並ビニ $\qquad S=\sigma+it$

$$\sum_{\Lambda_n>0} \Lambda_n A_n e^{\Lambda_n s}$$

ハ夫々 half-plane $[0,+\infty)$ 並ビニ $(-\infty,0]$ ニ於テ解析概週期函数ノ Dirichlet series トナル。

此定理ガ何故興味アルカト云ヘバ一般ニ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

カラ formal ニ微分シテ得タ series $\sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$ ハ概週期函数ノ Fourier 級数トハナリマセン。ソウナル場合ハ $f(t)$ ノ derivative ガ存在シテ然モ其ガ又ハリ概週期函数トナル場合ニ限リマス。其時初メテ

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} i\Lambda_n A_n e^{i\Lambda_n t}$$

依ッテ何等特別ノ假定ナクシテ得ラレタ Petersen ノ定理ハ概週期函数ノ Fourier 級数ノ formal differentiation ニ関スル面白イ定理デアリ、此ノ定理ハ同時ニ Bohr ノ解析概週期函数ノ Laurent Seperation ニ関スル定理ノ擴張トモナツテ居マス。

次ニ

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t} \qquad (\Lambda_n \text{ ハ凡テ} \neq 0 \text{ トスル})$$

ヲ formal ニ積分シテ得タ series

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \qquad (C \text{ ハ常数})$$

モ亦一般ニ概週期函数ノ Fourier 級数トナリマセン。ソウナル場合ハ

$$F(t) = \int^{t} f(x)\,dx$$

ガ有界ナ場合，従ッテ F(t) ガ又ハリ概週期函数トナル場合ニ限リマス。此処ニ於テ概週期函数ノ Fourier 級数ノ formal integration ニ関スル定理ガアルベキ筈デス。其ニ對シテ私ハ次ノ定理ヲ得マシタ。

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ real variable t ノ概週期函数トスルトキ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sigma + i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n t} \qquad (\sigma \text{ ハ任意ノ正数})$$

ハ概週期函數ノ Fourier 級数デアル。（此ノ定理ノ証明ハ *On the Formal Integration of the Fourier Series of an Almost Periodic Function* トイフ題目デ 10 月＝発行サレル *Matematisk Tidsskrift* B＝出ル筈デス）

以上ノ Petersen ノ定理モ私ノ定理モ其ノ証明法ハ本質的＝見テ Favard ノ方法ト異ナッテ居マセン。然モ此ノ Favard ノ方法ヲ利用シテ Copenhagen 大學數學教室ノ B. Jessen ハ次ノヤウナ概週期函数ノ Fourier 級数ノ operation ＝関スル一般的ナ定理ヲ得マシタ。（此事＝関スル Jessen ノ論文ガ *Remarks on the theorems of R. Petersen and S. Takahashi* トイフ題目デヤハリ 10 月＝発行サレル *Matematisk Tidsskrift* B＝出ル筈デス）

今 $K(x)$ ヲ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(x)|\,dx$$

ガ收斂スル様ナ real variable ノ函数トシ其 Fourier transform

$$H(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x)e^{-i\lambda x}dx$$

ヲ考ヘル。然ルトキ

$$f(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ヲ real variable t ノ概週期函數トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} H(\Lambda_n) A_n e^{i\Lambda_n t}$$

ハ

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(-x+t) K(x)\, dx$$

ナル概週期函數ノ Fourier 級數デアル。

此ノ定理ハ Jessen モ注意シテ居ルヤウニ Bochner ノ論文

Über die Struktur von Fourierreihen fastperiodischer Funktionen

(Münchener Berichte, 1928)

中ニ極ク implicitely ニ姿ヲ現ハシテ居マス。先掲ノ Petersen ノ定理モ私ノ定理モ $K(x)$ ヲ特殊ナ函數ニ取レバ出テ來マス。

此ノ Bochner-Jessen ノ定理ハ一般的ナモノナノデ其レカラ種々ノ興味アル定理ガ誘導サレル可能性ガ充分アルヤウニ思ヘマス。又 Bochner-Jessen ノ定理自身ヲ更ニ擴張スルコトモ試ミラレルベキ價値ガアルト信ジマス。