

210. 函數方程式 $f(f(x)) = F(x) =$ 就テ

守野利雄 (商船)

南雲君が 57 号 1977 デ話サレタ上誌ノ函數方程式ハ僕
モ前ニ考ヘタコトガアルノデ未整理、未完成ノマコナガラ、
何カノ材料ニモトソレテ報告シマス。

$f(f(x)) = F(x)$ ノ解ヲ用ヒテ $y = f(x)$ ナル曲線ヲ
考ヘテ見ルト、コレハ次ノ如キ二変數 Iteration ノ不変
曲線トナル。

但シ不変曲線トハコノ Iteration ヲ施シタトキ、コ
ノ曲線上ノ点ガ再ビコノ曲線上ノ点トナルモノノコトヲイフ。
コノ点ハ特別ナ場合ニハソレ自身ニ一致スル (不変点) ガ、
一般ニハ違ツテオイ。サテ今ノ場合ノ Iteration
ハ

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$

ノ如キモノデアール。何トナレバ $y_n = f(x_n)$ ナル如キ点 (x_n, y_n) ヲ考ヘテ見ルト、 $f(x)$ ガ上記函数方程式ノ解ナルコトヨリ、

$$f(y_n) = F(x_n)$$

従ツテ $f(x_{n+1}) = y_{n+1}$

トナリ、 $(x_n, y_n) = (1)$ ヲ施シタ (x_{n+1}, y_{n+1}) ガ矢張り同シ曲線 $y = f(x)$ ノ上ニナルコトトナル。

一例トシテ $f(f(x)) = x$ ヲトル、コノ場合ニ相當ス

ル Iteration

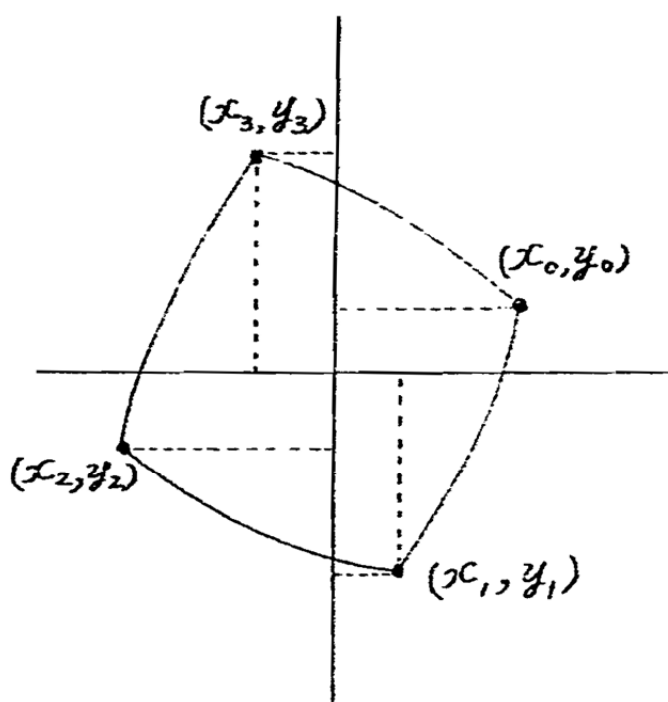
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

ニツイテハ $y = x$ ニツイテ對稱ナ曲線ハスベテ不変曲線ニナル、コノ中カラ $f(f(x)) = x$ ニ適合スルモノヲトルニ、増加函数デアハ $y = x$ ガ唯トナリ、他ハ單調減少デア $y = x$ ニツイテ對稱ナラバスベテ $f(f(x)) = x$ ノ解トナルマウデアール、コノ他ノモノデアハ $y = f(x)$ ガ多價トナリ $f(f(x))$ ノ意味ガ定メ難クナル。

次ニ $f(f(x)) = -x$ ヲ例トスル、コノ場合、Iteration

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases}$$

ハ原点ヲ中心トスル右 90° 廻轉デアリ、一点 (x_0, y_0) ノ
Iteration ハ 図ノマウニ原点ヲトリ 冊ンデ 排列シ



$y = f(x)$ が一價デア
アレマウナ 不変曲線
が得ラレクナル様
デアル。

但シコレハ *real*
デノ話デアルガ、複
素変数ヲ使ヘバ

$f(x) = ix$ ノ如キ
ハ 明 = $f(f(x)) = -x$

ノ 解ニナル。

コノ際ハ $y = ix$ ガ Iteration $x_{n+1} = y_n$,
 $y_{n+1} = -x_n$ ノ 不変曲線ニナツテキル。

話ヲ *analytic* ト制限スルト、事ハ大分具体的ニナ
リサウダガ、コノ際ハ Iteration (1) ノ 不変点 (ξ, η)
即チ

$$\begin{cases} \xi = \eta \\ \eta = F(\xi) \end{cases}$$

ノ根ガ役目ヲツトメサウダ、コノ周囲デ $F(x)$ ヲ次ノ如ク展
開シ

$$F(x) = \xi + a(x - \xi) + \dots$$

トシテ (1) ヲ書ケト

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

更 = $f(x)$ 7

$$f(x) = \xi + k(x - \xi) + \dots$$

、如ク書イテ、 $y = f(x)$ が上記 (1) デ不変ナコトヲ話セバ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \xi + k(x_n - \xi) + \dots \\ \xi + k(x_{n+1} - \xi) + \dots = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

之カラ x_{n+1} 7 消去スレバ

$$k^2(x_n - \xi) = a(x_n - \xi) + \dots$$

故 = $k^2 = a$ トナル。

即チ $F'(\xi)$ カラ $f'(\xi)$ が $\pm\sqrt{F'(\xi)}$ トシテ得ラレル譯デアル。 $f(f(x)) = -x$ ノ例 = オケル $f(x) = ix$ ハ丁度コレ = 當ツテキル。(但シコノ話ハ $F'(\xi) \neq 0$)

以上大余 *rough* + 話デアルガ、余暇アラバ追々トコレヲ引キシメ、マトメテ行キタク思ツテマラス。