211. *Aussagenkalkül* ニ於ケル"命題"ノ定義ニ就イテ（II）

伊藤　誠（御影師）

[1] 前稿（I）ニ於イテ論理的 *Operator* ガ C 及ビ N

ノニツデアル場合ニツイテ"命題"ヲ定義シタ。ソシテ此ノ定義ニ従ツテ *Menger* ノ定理ヲ証明シ、猶又 n 次ノ命題ノ数ヲ求メタ。コノ所論ヲ一般ノ場合ニ擴張シタラ如何ナルデアラウカ？ 以下ソレニ就イテ考ヘテミタイ。

前ト同様ニ

$$\alpha_0 = \{p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{a_0}\}$$

ヲ *Elementare Aussagenvariablen* ノ集合トスル。

今 N (*Negation*) ノ如キ *einstelling* ナ論理的 *Operator* ヲ γ_1 個考ヘ，之レヲ $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}$ デ表ハシ、コノ集合ヲ $\Gamma^{(1)}$ トスル。即チ

$$\Gamma^{(1)} = \{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_1}^{(1)}\},$$

同様ニ $\Gamma^{(2)} = \{C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_2}^{(2)}\},$

- -

- -

$$\Gamma^{(r)} = \{C_1^{(r)}, C_2^{(r)}, \cdots\cdots, C_{\gamma_r}^{(r)}\},$$

トスル。

コヽニ $C^{(\lambda)}$ ハ λ-*stelling* ナ *Operator* ヲ表ハシテヰルガ，コレカラ之ヲ位数 λ ノ *Operator* ト呼ブコトニスル。

扨テ"n 次ノ命題" A_n ヲ前ニ倣ツテ次ノ如ク歸納的ニ定義スル：

1) $A_0 = p_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, a_0)$

2) $A_{n+1} = C^{(1)} A_n$

$\quad$ od. $C^{(2)} A_{i_1} A_{i_2} \quad (i_1 + i_2 = n)$

$\quad$ ---------------

$\quad$ ---------------

$\quad$ od. $C^{(r)} A_{i_1} A_{i_2} \cdots\cdots A_{i_r} \; (i_1 + i_2 + \cdots\cdots + i_r = n)$

然ルトキハ$\mathfrak{A}_i$ヲ以ッテi次ノ命題全部ヨリナル集合ヲ表ハセバ

$$\mathfrak{A}_{n+1} = \Gamma^{(1)} \mathfrak{A}_n + \sum_{i_1+i_2=n} \Gamma^{(2)} \mathfrak{A}_{i_1} \mathfrak{A}_{i_2} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+\cdots\cdots+i_r=n} \Gamma^{(r)} \mathfrak{A}_{i_1} \mathfrak{A}_{i_2} \cdots\cdots \mathfrak{A}_{i_r}$$

ナル関係ガ成リ立ツ。但シコヽ＝$\Gamma^{(\nu)} \mathfrak{A}_{i_1} \cdots\cdots \mathfrak{A}_{i_\nu}$ハ$C^{(\nu)} A_{i_1} \cdots\cdots A_{i_\nu}$トル形ノ命題全部ヲ表ハスモノトスル。

今、斯様ニシテ定義サレタn次ノ一ツノ命題A_n中ニ於ケル

$$\left\{\begin{array}{lll} p\text{ノ数ヲ} & & \pi_n \\ C^{(1)} & 〃 & c_n^{(1)} \\ C^{(2)} & 〃 & c_n^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ C^{(r)} & 〃 & c_n^{(r)} \end{array}\right.$$

トスレバ明ラカニ

$$\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)} = n$$

ニシテ、且ツ

$$\text{(I)} \quad \boxed{\pi_n = \sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1}$$

ナル関係ノアルコトガ知ラレル。之レヲ下ニ証明シテミヤウ。

〔証明〕 n ニ就イテ Induktion ヲ行フ。

α) $n=0$ ノトキハ $C_n^{(\lambda)}=0$ $(\lambda=1,2,\cdots\cdots,r)$ ニシテ $\pi_0=1$ ナル故確カニ上式ハ成リ立ツ。

β) $i=1,2,\cdots\cdots,n$ マデノ A_i ニ就イテハ (I) ガ成リ立ツト仮定スル。然ルトキハ定義ニヨッテ A_{n+1} ハ次ノ如キ形デアル。

$$A_{n+1} = C^{(\nu)} A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots\cdots, A_{i_\nu}$$

$$(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_\nu = n)$$

従ッテ

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1} &= \pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots+\pi_{i_\nu} \\
&= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_2}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots \\
&\qquad +\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\nu}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1\right] \\
&= \sum_{\lambda=1}^{r}\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\nu}^{(\lambda)}\right)(\lambda-1)+\nu
\end{aligned}$$

然ルニ今ノ場合

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\nu}^{(\lambda)}=C_{n+1}^{(\lambda)} & (\lambda\neq\nu) \\ \quad\quad '' \quad\quad\quad\quad '' \quad\quad =C_{n+1}^{(\nu)}-1 & (\lambda=\nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ

$$=\sum_{\lambda=1,\lambda\neq\mu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+(C_{n+1}^{(\nu)}-1)(\nu-1)+\nu$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\lambda-1)+1$$

トナル。 即チ $i=n+1$ ノトキニモ（I）ガ成リ立ツコトト

ナル。 α)，β) ニヨツテ（I）ガ一般ニ成立スルコトガ分ツタ。

此ノ（I）式ハ前稿ニ述ベタ Menger ノ條件（I）ニ相等スルモノデアツテ、實際此ノ式ニ於イテ $r=2$ トオケバ

$$\pi_n=\sum_{\lambda=1}^{2} C_n^{(\lambda)}(\lambda-1)+1=C_n^{(2)}+1$$

トナツテ Menger ノ條件（I）ガ得ラレル。

更ニ Menger ノ條件（II）ニ相等スルモノハ何デアラウカ？ 之ハ次ノ不等式デ與ヘラレル：

$$\text{(II)} \quad \boxed{\pi_n(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_n^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1),\ (\mu=1,2,\cdots\cdots,m-1)}$$

但シ、コヽニ $\pi_n(\mu)$ ハ A_n ニ於イテ μ 番目ノ文字マデ

ノ Anfangsschnitt $A_n(\mu)$中ノpノ數ヲ表ハシ，
$C_n^{(\lambda)}(\mu)$ ハ同様ニ $A_n(\mu)$中ノ Ordnung λナル
Operator ノ數ヲ表ハス。又 m ハ A_n ヲ形成スル文字
全部ノ數，即チ

$$m=\pi_n+n$$

デアルトスル。

此ノ不等式(II)ノ証明ハ(I)ト同様ニ n ニ就イテノ
Induktion ニ依ル。

〔証明〕

α) $n=1$ ノトキハ

$$A^{(1)}=C^{(\nu)}p_{i_1}p_{i_2}\text{------}p_{i_\nu}\quad(1\leqq i_1,i_2,\cdots\cdots,i_\nu\leqq a_0)$$

ナル形デアルカラ

$$\pi_1(\mu)=\mu-1$$

又 $$\sum_{\lambda=1}^{r}C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1)=c_1^{(\nu)}(\mu-1)=1\times(\mu-1)=\mu-1,$$

然ルニ $\mu\leqq\nu$,

故ニ $$\pi_1(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r}C_1^{(\lambda)}(\mu)(\lambda-1)$$

トナリ、上ノ不等式ハ確カニ成立スル。

β) $n=1,2,3,\text{------},n$ マデノ値ニ對シテハ、不等式(II)ガ成立シタト假定スル。 然ルトキハ A_{n+1} ハ

$$A_{n+1}=C^{(\nu)}A_{i_1}A_{i_2}\text{------}A_{i_\rho}\text{-------}A_{i_\nu}$$

ナル形デアルカラ、μ 個ノ文字ヨリ成ルソノ echte

$\mathfrak{Anfangsschnitt}$ Q_μヲ考ヘルト，夫レハ次ノ二ツノ場合ニ分レル。

$$\text{(i)}\quad Q(\mu)=C^{(\nu)}A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_\rho}\qquad(\rho<\nu)$$

$$\text{(ii)}\quad Q(\mu)=C^{(\nu)}A_{i_1}A_{i_2}\cdots\cdots A_{i_{\rho-1}}A'_{i_\rho}(\mu')\quad(\rho\leqq\nu)$$

但シ、$A'_{i_\rho}(\mu')$ハA_{i_ρ}ノ eichte Anfangsschnitt ヲ表ハシ，μ'個ノ文字カラナルモノトスル。

<u>(i)ノ場合：</u>　$\pi_{n+1}(\mu)$ハ$Q(\mu)$中ノpノ数ニシテ、ソレハ$A_{i_1}, A_{i_2},\cdots\cdots, A_{i_\rho}$中ノ$p$ノ數ノ和ニ等シイ。即チ

$$\pi_{n+1}(\mu)=\pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots+\pi_{i_\rho}$$

コレハ先ニ証明シタ式(I)ニヨリ

$$=\left[\sum_{\lambda=1}^{r}C_{i_1}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum_{\lambda=1}^{r}C_{i_2}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\left[\sum_{\lambda=1}^{r}C_{i_\rho}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r}\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\rho}^{(\lambda)}\right)\cdot(\lambda-1)+\rho$$

然ルニ

$$\begin{cases}C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_\rho}^{(\lambda)}=C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda\neq\nu)\\ \qquad\text{〃}\qquad\qquad\text{〃}\qquad=C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1 & (\lambda=\nu)\end{cases}$$

ナル故、上式ハ次ノ如クナル。

$$\pi_{n+1}(\mu)=\sum_{\lambda=1,\ \lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)+C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)\cdot(\nu-1)+\rho$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)-(\nu-\rho-1),$$

而シテ　$\rho<\nu$　デアルカラ,

$\nu-\rho-1\geqq 0$

故＝　$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

即チ　$n=n+1$　＝對シテ（II）ガ成立スルコトトナル。

<u>(ii) ノ場合</u>：　コノ場合＝ハ

$$\pi_{n+1}(\mu)=\pi_{i_1}+\pi_{i_2}+\cdots\cdots+\pi_{i_{\rho-1}}$$
$$+(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ } p \text{ ノ数})$$

トナル。而シテ $\pi_{i_1},\cdots\cdots,\pi_{i_{\rho-1}}$ ハ前式（I）＝ヨッテ與ヘラレ，又 $i_\rho\leqq n$ ナル故．假定＝ヨリ

$$(A'_{i_\rho}(\mu')\text{ 中ノ } p \text{ ノ數})\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

從ッテ

$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_1}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\left[\sum C_{i_2}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\cdots\cdots$$

$$+\left[\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}\cdot(\lambda-1)+1\right]+\sum_{\lambda=1}^{r} C_{i_\rho}^{(\lambda)}*(\mu')\cdot(\lambda-1)$$

$$=\sum\left(C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}+C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')\right)\cdot(\lambda-1)+(\rho-1)$$

然ルニ

$$\begin{cases} C_{i_1}^{(\lambda)}+C_{i_2}^{(\lambda)}+\cdots\cdots+C_{i_{\rho-1}}^{(\lambda)}+C_{i_\rho}^{(\lambda)}(\mu')=C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu) & (\lambda\neq\nu) \\ \quad〃 \qquad\qquad 〃 \qquad\qquad =C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1 & (\lambda=\nu) \end{cases}$$

ナル故，上式ハ次ノ如クナル；

$$=\sum_{\lambda=1,\,\lambda\neq\nu}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)+\left(C_{n+1}^{(\nu)}(\mu)-1\right)\cdot(\nu-1)+(\rho-1)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)-(\nu-\rho)$$

而シテ $\nu\geqq\rho$ デアルカラ、結局

$$\pi_{n+1}(\mu)\leqq\sum_{\lambda=1}^{r} C_{n+1}^{(\lambda)}(\mu)\cdot(\lambda-1)$$

$$(\mu=1,\,2,\,\cdots\cdots\cdots,\,m-1)$$

ヲ得ル。 α) 及ビ β) デ帰納法ニヨル(II)式ノ証明ハ完結シタ．

扨テ上述ニヨリ (I) 及ビ(II)式ハ $p_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,a_0)$ 並ビニ $C_l^{(\lambda)}\,(\lambda=1,2,\cdots\cdots\cdots,r;\ l=1,2,\cdots\cdots\cdots,\gamma_\lambda)$ 等ノ文字カラ成ルーツノ順序集合ガ Aussage ヲ表ハス為メ必要條件デアルコトガワカッタ。

——(ツヅク)——