216. Closure ニ関スル一問題ヘノ Stone ノ定理ノ應用

吉 田 耕 作 (阪大)

Hilbert space $\mathfrak{H}$ ニ於ケル unitary transformation ノ one-parameter group $\{U_t\}$ ガ與ヘラレタトキ, $\mathfrak{H}$ ノ element f ガ如何ナル條件ヲ満足スレバ, closed linear manifold $\{f_t\} = \{U_t f\}$ —— f_t ノ全テデ張ラレル一次空間ノ Abschliessung —— ガ $\mathfrak{H}$ ニ一致スルカ?

U_t ヲ messbar トスル。即チ任意ノ $f, g \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $(U_t f, g)$ ナル t ノ函数ガ messbar トスル。然ラバ Neumann ノ示シタ如ク $(U_t f, g)$ ハ t ノ stetig ナ函数ニナルカラ Stone ノ定理ニヨリ

$$(1) \quad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(E(x)f, g)$$

コヽニ $E(x)$ ハ或 hypermaximal hermition operator ノ resolution of identity.

故ニ $$(U_t f, g)\frac{\sin \lambda t}{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(E(x)f, g)\,\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{itv}\,dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d(E(x)f,g)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{it(x+v)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}dw\,\frac{1}{2}\int_{w-\lambda}^{w+\lambda}d(E(x)f,g)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}dw\,\frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$$

従ッテ

$$(2)\quad \frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iwt}(U_tf,g)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

定理. $\{U_tf\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルタメノ必充條件ハ $\{f_\lambda\}=\{E(\lambda)f\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルコトデアル。

上定理ノ應用トシテ Wiener ノ定理（Fourier integral p.100）ヲ再証明シテミマセウ。即チ

$\mathfrak{H}=L_2(-\infty,\infty)$, $U_tf(x)=f(x+t)$ トスルト (2) ヨリ

$$\frac{1}{2}\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iwt}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\frac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}dt$$

故＝ $f(x)$, $\dfrac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}$, Fourier

Transformヲ夫々 $F(y)$, $G_{\lambda,w}(y)$ トスレバ

(3) $$\frac{1}{2}\Big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\Big)F(y)=F(y)\,G_{\lambda,w}(y)$$

ココニ

$$\begin{cases} G_{\lambda,w}(y)=\frac{1}{2}, & -\lambda-w<y<\lambda-w \\ \qquad\quad =0, & y<-\lambda-w \text{ or } \lambda-w<y \\ \qquad\quad =\frac{1}{4}, & y=-\lambda-w \text{ or } y=\lambda-w \\ \text{但シ } \lambda>0 & \end{cases}$$

偖. F.T.ハ一ツノunitary transformationダカラ $\{E(k)f(x)\}$ ガ $\mathfrak{h}$ ヲ張ルコトハ $\{E(k)F(y)\}$ ガ $\mathfrak{h}$ ヲ張ルコトトハäquivalent。故ニWienerノ定理

$$\mathfrak{h}=L_2(-\infty,\infty),\quad U_t f(x)=f(x+t)$$

トスルトキ $\{U_t f(x)\}$ ガ $\mathfrak{h}$ ニ一致スルタメノ必充條件ハ $f(x)$ ノF.T. $F(y)$ ノzero pointsノmeasure 0 ナルコトデアル。

ヲ得ル。

以上formalナ計算ヲ行ッテ詳シイ議論ヲシマセンデシタガ計算ノ意味ヲ有スルコトハ x ノ函数 $(E(x)f,g)$ ガ有界変分デアルコトカラタヤスク分リマス。