

## 217. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式ニ就イテ(II)

北川 敏 男 (阪大)

4. 定理1ハ, 實ハ次ノ如ク精密ニ出來ル, 即チ  
定理2. 定理1ト同ジ假定ノモトニ於イテ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{e^{\lambda x} \{L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f)\}}{G(\lambda)} d\lambda$$

$$\longrightarrow f(x) \quad (r \rightarrow \infty, r \neq 0)$$

ナルヲ $\gamma =$ ,  $\{C_r\}$ ヲ取ラベシ。但シ,  $x_0 + h_\delta < x < x_0 + h_{\delta+1}$   
( $\delta = 0, 1, 2, \dots, n-1$ )ヲアス。

然モ各區間  $x_0 + h_\delta + \varepsilon \leq x \leq x_0 + h_{\delta+1} - \varepsilon$ ニ於テ  
收斂ハ一様デアス。(但シ  $\varepsilon$ ハ任意ノ正數)

証明ニハ, 豫備定理1, 2, 3ニ於イテ, 各々, Limit  
ガ夫々,  $0 < \varepsilon \leq \delta \leq b - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \delta \leq h_\delta - \varepsilon$ ,  
 $0 < \varepsilon \leq \delta \leq h_\delta - \varepsilon$ デ一様ニ存在スルコトヲ示シテオケベ  
ヨイノデアス。

茲デ始メテ  $f(x)$ ガ

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (iv)$$

トイフ條件ヲ入レレナラバ,

定理3. 定理1ノ假定ニ更ニ條件(iv)ヲ加ヘルナラバ,

$S_r(x_0, x; f)$ ハ任意ノ有限區間デ一様ニ  $f(x)$

= 収斂スル。

証明: コレニハ,

$$L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f)$$

が  $x_0$  の函数トシテハ実ハ定数ナルコトヲ示セバヨイ。

ソノタメニハ

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ L(x_0, x, \lambda; f) + K(x_0, x, \lambda; f) \right\} = 0$$

ナルコトヲ、(iv)ヲ用キテ証明スレバヨイ。計算ハ略ス。

5. 今マデノ問題ヲ離レ、一般ノ定差法ノ所論ニ平行シテ *homogeneous* デナイ函数方程式

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f^{(k)}(x+\xi) d\varphi_k(\xi) = g(x)$$

ノ解ノ研究ニ移ラユ。

先ツ拡張サレタ Bernoulli's polynomials トモイフベキモノヲ次ノ如ク導入スル:

$$(0^\circ) \text{ 先ツ } B_0 \int_a^b d\varphi_0(\xi) = 1 \text{ トナルヲ } = B_0 \text{ ヲ決定スル。コレニハ } \int_a^b d\varphi_0(\xi) \neq 0 \text{ ヲ假定シテオク。}$$

(1<sup>o</sup>) 次ニ、 $B_1(\xi) = B_0 \xi + B_1$  トオイテ

$$\Gamma B_1(0) = B_1 \int_a^b d\varphi_0(\xi) + B_0 \left\{ \int_a^b \xi d\varphi_0(\xi) + \int_a^b d\varphi_1(\xi) \right\} = 0$$

=依り  $B_1$  が一意 = 決定スル。

$$(2^\circ) \quad \text{又, } B_2(\xi) = \frac{B_0}{2!} \xi^2 + \frac{B_1}{1!} \xi + B_2 \text{ トオイト}$$

$\Gamma B_2(0) = 0$  が  $B_2$  が一意 = キマル。

一般 =

$$(n^\circ) \quad B_n(\xi) = \frac{B_0 \xi^n}{n!} + \frac{B_1 \xi^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{B_2 \xi^{n-2}}{(n-2)!} + \dots$$

$$\dots + B_{n-1} \xi + B_n$$

トシテ

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b B_n^{(k)}(\xi) d\varphi_k(\xi) = 0 \quad (A)$$

=ヨリ、 $B_n$  が決定サレル。

又以上ノツクリ方カラ明カ =

$$\frac{dB_r(\xi)}{d(\xi)} = B_{r-1}(\xi) \quad (B)$$

6. 以上ノ如ク  $\{B_r(\xi)\}$  ヲ定義スルトキ、次ノ結果ヲ得ル。

定理4.  $G(\lambda)$  ノ零点以外ハ

$$\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} = \sum_{\Delta=0}^{\infty} B_{\Delta}(x) \lambda^{\Delta}$$

証明:

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \int_a^b e^{\lambda t} d\varphi_k(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+m} \int_a^b t^m d\varphi_k(t)}{m!}$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+m} \alpha_{m,k}}{m!}$$

但シ

$$\alpha_{m,k} = \int_a^b t^m d\varphi_k(t) \quad (m \geq 0, k \geq 0, \text{トキ})$$

$$\alpha_{m,k} = 0 \quad (m < 0, \text{トキ})$$

トシテオク。

ソコデ更ニ

$$\beta_s = \frac{\alpha_{s,0}}{s!} + \frac{\alpha_{s-1,1}}{(s-1)!} + \dots + \frac{\alpha_{s-n,n}}{(s-n)!}$$

トオケル

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^{k+m} \alpha_{m,k}}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \beta_m \end{aligned}$$

トナル、ソコデ

$$\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} = \sum_{s=0}^{\infty} g_s(x) \lambda^s$$

トオイテ  $g_s(x) \equiv B_s(x)$  トナルコトヲ示サシ。

コトニハ、

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} &= \sum_{s=0}^{\infty} g_s(x) \lambda^s \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \beta_s \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m g_0(x) + \beta_{m-1} g_1(x) + \dots + \beta_0 g_m(x) \right\} \lambda^m \end{aligned}$$

即ち

$$\beta_m g_0(x) + \beta_{m-1} g_1(x) + \dots + \beta_0 g_m(x) = \frac{x^m}{m!}$$
  
= ヨツテ  $\{g_n(x)\}$  の定まるコトがワカル, コレ  $\{B_n(x)\}$   
ヲ決定スル式 = 外ナラヌコトガナル。

定理5.

$$\Gamma B_m(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^b B_m^{(k)}(x+\xi) d\varphi_k(\xi) = \frac{x^m}{m!} \quad (m=0,1,2,\dots)$$

証明:

$$\begin{aligned} B_m(x+\xi) &= \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{B_m^{(\delta)}(\xi)}{\delta!} x^\delta = \sum_{\delta=0}^m \frac{B_m^{(\delta)}(\xi)}{\delta!} x^\delta \\ &= \sum_{\delta=0}^m \frac{B_{(m-\delta)}(\xi)}{\delta!} x^\delta \end{aligned}$$

依ツテ

$$\begin{aligned} \Gamma B_m(x) &= \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left\{ B_m(x+\xi) \right\} d\varphi_k(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^n \int_a^b \left\{ \sum_{\delta=0}^m \frac{B_{m-\delta-k}(\xi)}{\delta!} x^\delta \right\} d\varphi_k(\xi) \\ &= \sum_{\delta=0}^m \frac{x^\delta}{\delta!} \sum_{k=0}^n \int_a^b B_{m-\delta-k}(\xi) d\varphi_k(\xi) \\ &= \sum_{\delta=0}^m \frac{x^\delta}{\delta!} \Gamma B_{m-\delta}(0) \quad (m-\delta \geq 0) \\ &= \frac{x^m}{m!} \quad (\text{証明了}) \end{aligned}$$

次=, コレヲ土台=シテ Euler-Maclaurin 定理  
ノ擴張=移ラウ。

——(續ク)——